



FA 7 A 37

DELLE
PROGRESSIONI E SERIE

LIBRI DUE

DEL P. FRANCESCO LUINO

della Compagnia di Gesù

COLL'AGGIUNTA

DI DUE MEMORIE

DEL P. RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

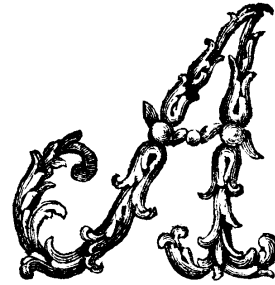
della medesima Compagnia.



IN VIENNA MDCCLXVII.
Appresso Giuseppe Calcazzi egio stampatore.
Con licenza de' Superiori, e Privilegio.

A SUA ECCELLENZA
IL SIG.
CARLO CONTE DI FIRMIAN
SIGNORE DI CRONMETZ MEGGEL
E LEOPOLDSRON
CAVALIERE DELL' INSIGNE ORDINE
DEL TOSON D'ORO
PLENIPOTENZIARIO NELLA LOMBARDIA AUSTRIACA
VICE-GOVERNATORE DI MANTOVA
SABIONETA E BOZZOLO
CONSIGLIERE INTIMO ATTUALE DI STATO
ec. ec. ec.

ECCELLENZA.^v



Una tenue , e poco pregevole operetta , qual si è questa mia , sembra , che mal si convenga il venire innanzi a V. E. , e richiederla di sua protezione . Ma , qual ch' egli siasi il Libro , esso è

a

pur

pur Libro , che appartiene a scienza , e a quella singolarmente , la quale sopra le altre tutte per maniera sollevasi , che il gran VVolfio non temè di dire Humanæ eruditionis apicem conscendimus Analysim tradituri. Ciò basta , non solo perchè io punto non dubiti , che V. E. non sia per accoglierlo favorevolmente, ma anche perchè io mi rechi a dovere il farlene offerta . Io non parlo qui , o Signore, nè dell' amore alle lettere , ed alle scienze , che in mezzo alle più ardue cure del Politico

Governo le è indivisibil compagno , nè della deputazion luminosa , ch' Ella ha dall' Augustissima Nostra Sovrana riportato nella soprantendenza alla Regia Università di Pavia , e a tutte le Scuole della Lombardia Austriaca a V. E. incaricata. Sono , è vero , questi per me vivi stimoli a supplicarla di volere col patrocinio suo accordare a quest' opera mia quel pregio , che altronde non potrebbe sperare . Ma un altro motivo rammenterò io piuttosto , che a me in particolar modo appartiene , e non

Sarà, spero, a V. E. di scaro. A giovamento di quegli principalmente, che intraprendono lo studio delle scienze Astronomiche, ho io indirizzata questa mia operetta: Perciocchè riflettendo, che questa sì nobile scienza non si ferma più di presente nelle semplici ricerche de' fatti, e nella sola osservazione, e combinazion de' fenomeni, ma s'innoltra a esaminare le cagioni, e da queste ne trae le tante, ed in apparenza sì irregolari variazioni, con un continuo uso, non solo della più sublime geometria,

tria, ma ancor del calcolo, e in questo non delle semplici proporzioni, e progressioni, ma del più composto metodo delle interpolazioni, e di ogni specie di serie le più complicate, io ho intrapreso, e di acquistare per me, e di comunicare poscia agli altri, quelle cognizioni, che più vantaggiose a ciò fossero, e più necessarie. Nel che fare, quanto a ragione possa io lusingarmi di avere fatta cosa a V. E. gradita, agevolmente conoscerallo chiunque sa, e la premura, e l'impegno, ch' Ella ha in promuo-

x
vere gli studj di tale natura ,
ed il favore singolarmente da
V. E. prestato alla erezione
di questa nostra Astronomica
Specola . Questo , o Signore ,
è ciò , che mi fa più d'ogn'
altra cosa ardito di offerire a
V. E. il presente , qualunque
sia , frutto di mie fatiche ; e
pieno de' più sinceri sentimen-
ti di riconoscenza , e di som-
missione , col più profondo ris-
petto mi protesto

Di V. E.

Milano 23. Ottobre 1767.

Umiliss. , Devotiss. , Obligatiss. sero.
Francesco Luino della Comp. di Gesù .

PREFAZIONE.^{xi}



Opera , che vi presento , o cortese
Lettore , non vi suppone nè mate-
matico consumato , nè affatto novizio
nelle matematiche facoltà . Per amen-
due queste classi di persone si sono ,
ancora a' dì miei , pubblicati acconci
trattati in ogni genere , ossia di calcolo , ossia spet-
tanti a geometria ; quando vi siate già altronde pro-
visto di una cotale misura di notizie sul calcolo finito
di Cartesio , e sull' infinito delle serie , credo , che dalla
lettura della presente operetta ne potrete trarre van-
taggio , e per riordinarvi in capo le cose quà e là lette
sparsamente su altri Autori , e per promuovere più
oltre le cognizioni vostre sull' arte analitica , e per
addestrarvi eziandio alla invenzione di nuovi me-
todi pel calcolo più sublime . A questi tre fini io al-
meno ho indirizzata l' Introduzione , ed i due Libri ,
ne' quali è divisa questa mia operetta ; non so poi
se farò stato bastantemente fortunato per conse-
guirgli .

Nella Introduzione vi piacerà forse il vedere
ristrette in poche formole , universali , e chiare ,
tutte le note leggi del calcolo per ogni specie di quan-
tità algebriche , ed i migliori metodi per trasfor-
mare , e per sciogliere le equazioni di diverso gra-
do , che più frequentemente s' incontrano nella so-
lu-

luzione de' problemi. Fin qui però non v'ha nulla di nuovo, nè che sia da pregiarsi più che tanto seppure di ciò degna a taluno non sembri la trattazione sulle quantità positive, e negative, e sulle regole de' segni; le trasformazioni ne' radicali, e la stessa, che ho data al metodo del Varignon per la soluzione delle equazioni di grado più elevato del terzo. A vero dire, io mi sono determinato a pubblicare questo *Trattato del Calcolo algebraico* per modo d'introduzione al restante, non tanto per non obbligarvi a rivedere su altri Autori gli artifizj analitici, de' quali miervo continuamente nel decorso, quanto perchè mi sembravano quelle tre materie trattate con qualche, non a tutti comune, eleganza, e precisione.

Nel primo Libro, in cui si parla delle progressioni geometriche, ed aritmetiche, incomincerete, spero, o Lettore, a sentire la fecondità, e l'importanza dell'analisi, ed acquisterete più giuste idee del legamento, ed unità delle parti, che la compongono. Trattano alcuni Autori la teoria delle progressioni indipendentemente dall'Analisi Cartesiana, a cui anzi la fanno precedere; ma le loro dimostrazioni restano sempre per ciò snervate, e languide, nè si sostengono che su certi metafisici raziocinj, non tanto facili a concepirsi, ed affai nojosi; io all'incontro dell'Analisi Cartesiana mi servo per dimostrarla, e su d'essa l'appoggio principalmente. La teoria delle proporzioni, e quella de'

lo-

logaritmi, tengono, dirò così, chiusa in mezzo la teoria delle progressioni, e stanno tutte e tre insieme unite per modo, che non si può degnamente trattare l'una senza l'altre. Nel Capo primo adunque di questo Libro, si parla delle proporzioni geometriche, ed aritmetiche, e col perpetuo uso di formole assai vibrare, e strette, seguitate poscia, ed illustrate da riflessioni addattate, e da opportune spiegazioni, mi lusingo di poter rendere famigliare, e dolce all'iniziato Algebrista l'analitico linguaggio, a cui troppo è necessario, che s'avvezzi la fantasia, se pretende inoltrarsi ne' calcoli più profondi. Nel Capo secondo vedrete, dedotta tutta la teoria delle progressioni geometriche, ed aritmetiche da due soli, e semplicissimi principj, con accompagnamento copioso di teoremi, e problemi, e di formole ben dimostrate, ed universali. Pel terzo Capo ardirei quasi di assicurarvi, che la teoria de' logaritmi vi è messa nella possibile, miglior sua luce, a non dover dispiacere anche a' più intendenti. Ho presa da Eulero la più genuina, e più naturale idea de' logaritmi, che noi usiamo ne' calcoli; ma quanto io dica di più d'Eulero sulla loro natura, e sulla maniera d'usargli, agevolmente conoscerallo chiunque si vorrà prendere la briga di confrontare ciò, ch'io espongo, e dimostro *ex professo*, con ciò, che ha detto Eulero, che tratta questo punto sol di passaggio. Il metodo di evitare i logaritmi negativi, tanto utile pe' calcoli trigonometrici, mi è costato assai

b

per

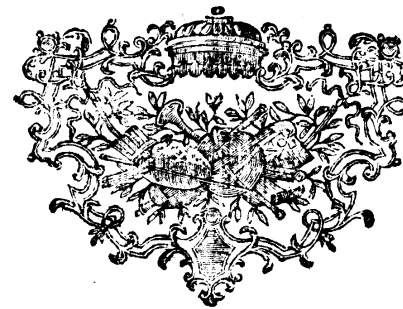
per ridurlo a quella semplicità, ed universalità, che non farà forse facile ritrovare presso altri Autori.

Ma in questo primo Libro, siccome ancora nell' Introduzione, non vi sono che cose elementari, e l' unico loro pregio, seppure ne hanno alcuno, si è che *non vi sono trattate elementarmente*; quasi tutte all' incontro le cose, ch' entrano nel secondo Libro appartengono al calcolo sublime, dove hanno il maggior suo uso, ed ho procurato di maneggiarle, e di stenderle con quella precisione, e scioltura di scrivere, che ad esse si conviene. Non v' ha teoria, che più naturalmente debba venir dopo quella delle progressioni, che la teoria delle serie, di cui quelle ne sono il primo ramo; eppure quanto pochi si senton portati a studiarla con applicazione? Ciò accade, parte per la difficoltà de' calcoli, pe' quali conviene pur passare per ben comprenderla, parte perchè non vedesi di primo colpo a quale fine, e con quale profitto per l' altre parti della matematica si possa essa indirizzare. Ho stimato perciò, che riuscirà cosa a tutti giovevole, se così tentassi di condurgli alla teoria delle serie, che insieme restassero da se appianati questi ostacoli. Primamente mi fo a mostrare ne' primi due Capi del secondo Libro, quanto frequentemente uopo sia entrare ne' calcoli colle serie, e con quanta velocità si determinin con esse i valori delle incognite quantità, o delle quantità assai composte, che ad ogni passo è mestieri introdurre nella soluzione de' problemi, e delle

e delle equazioni algebriche. Qui vedrete, o Lettore, trattata compiutamente l' evoluzione in serie delle potenze, e de' radicali, con metodi, altri presi da altri Autori, e da me ristretti in formole egualmente brevi, che universali; altri derivati da me col calcolo da que' primi, ed uno principalmente il più semplice, ed il meno avvertito, applicato distesamente a' numeri. Qui troverete innoltre sviluppati i metodi per l' evoluzione delle radici nelle equazioni composte, per l' evoluzione delle frazioni, finiti, ed infinitinomie ne' loro termini, per lo spezzamento delle frazioni volgari, e per il problema diretto, ed inverso delle frazioni continue. In tutte, ed in ciascuna di queste particolari trattazioni io penso d' avere e rischiarati, e messi in miglior ordine, e in varie guise aumentati, e distesi a più grande generalità diversi metodi fin qui conosciuti, ed usati ne' calcoli. Vorrei, che contaste tra i primi un metodo della Signora Agnesi, per lo spezzamento delle frazioni, ridotto qui a' suoi veri principj, ed alla generalità, che troppo mancava all' esposizione dell' Agnesi. Il Capo terzo mette fine al mio lavoro: Si parla in esso della invenzione de' termini generali, e delle somme generali delle serie. Ognun sa quanto sia intralciata questa parte di matematica, e per la difficoltà dell' argomento, e per i molteplici, e tutti da sublimi principj derivati metodi, de' quali l' hanno arricchita i più accreditati Scrittori. Io distinguo in tre classi le serie, cioè in serie

aritmiche , in ferie geometriche , ed in ferie composte dalle aritmetiche , e dalle geometriche ; assegno gl' infiniti diversi ordini , ne' quali si suddivide ciascuna classe , e per ciascuna classe espongo il metodo più acconcio , e più facile per trovare il termine , e la somma generale cercata . Vero è , che non mi sono divertito a formare a bella posta nuove ferie intralciate , comunque di nessun uso , unicamente per avere il piacere di sommarle , o di trovare il loro termine generale ; ma oltrecchè altri l' hanno già fatto per me , a nessuno il divieto di farlo in avvenire ; io ho stimato di dovere andar dietro piuttosto all' utilità , che alla pompa . Quanto al metodo , egli è unico , e semplicissimo per tutte le ferie sommabili , ma non è mio . Il celebre P. Riccati lo ha trovato , e svolto in tutte le sue parti nell' egregio suo Commentario sulle ferie , pubblicato fino dall' anno 1756. , nè credo mi riprenderà di ardito , se vedrà , che dopo l' esposizione del suo Metodo , e dopo l' applicazione del medesimo alle dette tre classi di ferie , io mi sono inoltrato a stendere alcune mie piccole osservazioni , indirizzate a renderlo più semplice , e spedito per la pratica : Tanto più ch' esse m' hanno servito a sciogliere per una strada , ch' io credo non ancora battuta da altri , il noto problema delle interpolazioni . Quante sono le ferie , alle quali si stende il Metodo del P. Riccati , altrettante sono quelle , che s' interpolan col mio ; anzi dato il termine generale di qualunque
 altra

altra ferie , si trova il termine generale della medesima ferie interpolata , e se la ferie è sommabile si trova anche la somma generale della interpolata , trovata che sia la generale somma della data . Voleva a tutto questo aggiungere una copiosa applicazione di questo Metodo all' Astronomia , ed esporre gli usi del medesimo per la quadratura delle curve ; ma questa sarebbe stata una digressione fuori di luogo , e l' opera , come sta , mi pare , che vada dal suo principio fino al fine sufficientemente crescendo colle dovute gradazioni .



INDICE.

INTRODUZIONE.

Calcolo Algebrico, e suo uso nella risoluzione delle equazioni.



CAPO PRIMO. Delle quantità algebriche, e loro calcolo in generale.

Nozioni sulle quantità algebriche. pag. 1

Origine, e natura delle quantità positive, e negative. p. 4

Regole de' segni + — p. 7

Riduzione delle quantità algebriche. p. 12

CAPO SECONDO. Leggi del calcolo nelle quantità algebriche.

Calcolo delle quantità intere. p. 18

Calcolo delle quantità intere per mezzo degli esponenti. p. 20

Calcolo delle frazioni. p. 21

Calcolo delle frazioni per mezzo degli esponenti. p. 22

Estrazione delle radici nelle quantità intere, e rotte. p. 23

Calcolo delle quantità radicali. p. 27

Trasformazioni nelle quantità radicali. p. 30

CAPO TERZO. Uso del calcolo algebrico nella risoluzione delle equazioni.

Formazione delle equazioni. p. 35

Numero, e qualità delle radici reali delle equazioni. p. 37

Numero, e qualità delle radici

immaginarie delle equazioni. p. 38

Trasformaz. delle equazioni. p. 41

Uso di queste trasformazioni. p. 43

Analisi delle equazioni di primo grado. p. 47

Analisi delle equazioni di grado più elevato del primo. p. 51

LIBRO PRIMO.

Proporzioni, e Progressioni Geometriche, ed Aritmetiche.



CAPO PRIMO. Delle ragioni, e proporzioni geometriche, ed aritmetiche.

Nozioni generali sulle ragioni, e proporzioni geometriche. p. 69

Proprietà comuni alle eguali ragioni geometriche semplici, e composte. p. 74

Proprietà comuni alle ineguali ragioni geometriche semplici, e composte. p. 81

Proprietà particolari alle ragioni geometriche composte. p. 82

Delle ragioni, e proporzioni aritmetiche. p. 89

Delle proporzioni armoniche, e controarmoniche. p. 91

CAPO SECONDO. Delle progressioni geometriche, ed aritmetiche.

Progressioni geometriche. p. 95

Progressioni aritmetiche. p. 101

Paragone delle due progressioni geometriche, ed aritmetiche. p. 106

CAPO

CAPO TERZO. De' logaritmi.

Natura, e proprietà de' logaritmi. p. 114

Metodi, e compendj de' metodi per costruire le tavole de' logaritmi. p. 117

Riduzione d'un dato sistema di logaritmi a qualunque altro sistema cercato. p. 121

Uso delle tavole de' logaritmi comuni. p. 122

Metodo per evitare i logaritmi negativi. p. 127

Evoluzione delle radici nelle equazioni composte. p. 158

CAPO SECONDO. Serie, che nascono dalle frazioni algebriche.

Primo metodo per l'evoluzione delle frazioni algebriche. p. 162

Secondo metodo. p. 163

Terzo metodo. p. 164

Spezzamento delle frazioni algebriche. p. 167

Evoluzione delle frazioni continue. p. 183

CAPO TERZO. Della sommazione delle serie, e del loro termine generale.

Classi diverse, ed espressioni generali delle serie. 104

Trovare la somma, ed il termine generale delle serie, secondo il Metodo del P. Riscati. p. 200

Osservazioni sul Metodo del P. Riscati. p. 212

Passaggio dalle serie interrotte alle serie continue. p. 217

Interpolazione delle serie di qualunque classe, ed ordine. p. 223

CAPO PRIMO. Serie, che nascono dalle potenze, e dalle radici algebriche.

Proprietà delle potenze d'un binomio. p. 133

Evoluzione in serie delle potenze d'un binomio. p. 138

Evoluzione delle potenze d'un infinitinomio. p. 140

Evoluzione delle quantità radicali. p. 145

Altro metodo per l'evoluzione de' radicali. p. 148

Tre altre formole per l'evoluzione de' radicali. p. 149

Ultimo metodo per l'evoluzione de' radicali. p. 151

Applicazione de' metodi precedenti alle numeriche quantità radicali. p. 152

Evoluzione delle radici nelle equazioni composte. p. 158

CAPO SECONDO. Serie, che nascono dalle frazioni algebriche.

Primo metodo per l'evoluzione delle frazioni algebriche. p. 162

Secondo metodo. p. 163

Terzo metodo. p. 164

Spezzamento delle frazioni algebriche. p. 167

Evoluzione delle frazioni continue. p. 183

CAPO TERZO. Della sommazione delle serie, e del loro termine generale.

Classi diverse, ed espressioni generali delle serie. 104

Trovare la somma, ed il termine generale delle serie, secondo il Metodo del P. Riscati. p. 200

Osservazioni sul Metodo del P. Riscati. p. 212

Passaggio dalle serie interrotte alle serie continue. p. 217

Interpolazione delle serie di qualunque classe, ed ordine. p. 223

AGGIUNTA.

Memorie del P. Ruggiero Bosovich. p. 239

Memoria prima su i logaritmi negativi.

Appendice alla prima Memoria. De' logaritmi delle quantità negative.

Memoria seconda sull'evoluzione delle potenze d'un infinitinomio.

JOANNES CAROLUS PINCETI

SOCIETATIS JESU

In Provincia Mediolanensi Præpositus Provincialis .

CUM Librum , cui titulus est : *Delle Progressioni , e Serie* ; a P. Francisco Luino Societatis nostræ Sacerdote compositum , aliquot periti Viri , quibus commissum fuit , recognoverint , & in lucem edi posse probaverint : facultate nobis a R. P. Laurentio Ricci Præposito Generali communicatâ , concedimus , ut typis mandetur , si ita iis , ad quos pertinet , videbitur . In quorum fidem has literas manu nostra subscriptas , & sigillo Societatis nostræ munitas dedimus .

Mediolani die 17. Novembris 1767.

Loco ✻ Sigilli .

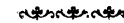
INTRODUZIONE.¹

CALCOLO ALGEBRAICO

E suo uso nella soluzione delle Equazioni .

CAPO PRIMO.

Delle quantità Algebraiche , e loro calcolo in generale .



Nozioni sulle quantità Algebraiche .

1. **L**E volgari cifre Arabeche 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. colle quali usasi per lo più calcolare i numeri , oltre il difetto di non essere arte ad esprimere che le quantità conosciute , rendono le operazioni del calcolo troppo prolisse , e confondono i passi delle operazioni medesime , compenetrando di mano in mano i valori de' risultati . Quindi è stato necessario esprimere e calcolare i numeri con altri segni che fossero più universali , e rendessero le operazioni del calcolo più spedite , e più chiare . Si sono assuefatti i Matematici alle lettere del Alfabeto : da principio esprimevansi con quelle cifre 1. 2. 3.... i numeri cognitivi , e gli incogniti cogli *a. b. c....* , in seguito , ad esempio di Cartesio , i numeri cognitivi s' incominciarono indifferentemente ad esprimere , o colle cifre 1. 2. 3... , o colle prime lettere dell' Alfabeto *a. b. c....* , e gli incogniti colle ultime *x. y. ...* come si usa comunemente a' nostri dì . Il calcolo delle quantità numeriche così espresse , si chiama *calcolo Algebraico* , o *calcolo delle quantità Algebraiche* , per l'uso grande ch' egli ha nell' Algebra ancor più sublime .

A

2. Si

2. Si fanno adunque su queste quantità le stesse operazioni che si usano ne' numeri. Coll' Addizione si cerca una quantità eguale ad altre quantità date, e prese insieme: Colla sottrazione si cerca l'eccesso d'una quantità sopra un'altra: Colla moltiplicazione si cerca una quantità che così contenga una delle date, come nell'altra si contiene l'unità: Colla divisione si cerca una quantità che così contenga l'unità, come in una delle date si contiene l'altra. Per indicare queste operazioni del calcolo nelle Algebraiche quantità, si sono posti in uso certi segni; per segno dell'Addizione si è scelto il $+$ che significa *più*; per la sottrazione il $-$ che significa *meno*; per la moltiplicazione il \times , oppure un punto che significa *moltiplicato per*; per la divisione una linea di separazione tralla quantità a dividerli, e quella per cui si deve fare la divisione scritta sotto la prima, appunto come nelle frazioni numeriche; si usano altresì due punti o il segno \div posto tralle due quantità date per la divisione. Il segno $>$ messo tra due quantità indica che quella è maggiore verso cui sta rivolta l'apertura del segno.

$a + b$ significa b congiunto ad a

$a - b$ significa b sottratto da a

$a \times b$
 $a \cdot b$
 $a b$ } significa a moltiplicato per b ; nell'espressione $a b$
 s'intende frapposto il segno di moltiplicazione.

$\frac{a}{b}$
 $a : b$ } significa a diviso per b

$a \div b$
 $a > b$
 $a < b$ } significa a maggiore di b
 a minore di b

3 Le quantità a, b, c, \dots si chiamano quantità *incomplete semplici*; le $a b, a b c, \dots$ si chiamano *incomplete composte*; ed una quantità formata da più quantità incomplete, ma insieme con-

congiunte co' segni $+$ $-$, si chiama quantità complessa; sarà *binomia*, se sarà formata da due quantità incomplete (ciascuna di queste si chiama *termine*) come $a + b c$; sarà *trinomia*, se sarà formata da tre termini come $a b - c d + f$; sarà... ec., e si chiamerà *finitinomia*, o *indefinitinomia* se sarà formata da un numero finito, o indefinito di termini. Termine *simile* ad un altro, significa termine formato dalle medesime lettere dell'altro, la quantità complessa *simile* ad un'altra, è quella quantità in cui tutti i termini sono simili, rispettivamente ai termini dell'altra,

4. In ogni termine d'una quantità algebraica come $5 a b x$ vanno distinti i *coefficienti* dagli *esponenti*. Quanto ai coefficienti: 1.º Altri sono coefficienti del termine, ed altri sono coefficienti di una o più lettere; i coefficienti del termine, altrimenti detti coefficienti *numerici*, sono que' numeri che precedono verso la sinistra qualunque quantità meramente algebraica; i coefficienti d'una o più lettere sono tutte le quantità, che con quell'una o più lettere formano il dato termine. Nel termine $5 a b x$, il numero 5 è coefficiente numerico del termine $5 a b x$; $5 a b$ è coefficiente di x ; $5 a x$ è coefficiente di b ; $5 b x$ è coefficiente di a . 2.º Que' termini che non hanno altro coefficiente numerico, hanno almeno per coefficiente l'unità, così il coefficiente numerico di $a b x$ è 1 , essendo $a b x$ eguale $a 1 a b x$. 3.º La diversità de' coefficienti numerici non turba la somiglianza, o dissomiglianza di due termini; cioè per distinguere le quantità simili dalle dissimili, non si ha riguardo che alle lettere; $5 a b x$ è simile ad $a b x$.

5. Quanto agli esponenti. 1.º Altro è esponente dalle dimensioni d'un termine, altro è esponente dalle dimensioni d'una lettera del termine medesimo; esponente delle dimensioni d'un termine, è il numero che esprime di quante lettere è formato quel termine; il termine $a b$ è di due dimensioni, perchè è formato di due lettere; $a b c$ è di tre dimensioni..... Questo nome di dimensioni è preso dall'analogia alla geometria, come si

4
vedrà a suo luogo. Alcuni chiamano *piano* il termine ab , chiamano *solido* il termine abc . . . ec. Esponente delle dimensioni d'una lettera del dato termine, è il numero che esprime quante volte sia la data lettera ripetuta nel dato termine; nel termine $3aab$, l'esponente delle dimensioni di a è 2, e l'esponente delle dimensioni di b è l'unità. 2.^o Quindi le dimensioni d'una lettera, o d'un termine, non dipendono da' coefficienti numerici. Se una lettera ha più d'una dimensione, si suole essa scrivere una sol volta, con alla destra in sito un po elevato l'indice delle sue dimensioni; invece di scrivere $3aab$, si scrive $3a^2b$; in certi casi è utile lo scrivere ancora l'unità per esponente delle dimensioni d'una semplice quantità incompleta; *in vece di scrivere* $3a^2b$, si scrive $3a^2b^1$.

Origine, e natura delle quantità algebriche positive, e negative.

6. **L**E quantità algebriche che sono precedute alla sinistra dal segno $+$ si chiamano quantità *affermative*, o *positive*, e quelle che sono precedute dal segno $-$ si chiamano *defettive*, o *negative*. Ciò non basta per intendere a fondo la natura delle quantità positive e negative, e l'uso che si fa nell'algebra de' segni $+ -$; prendiamo la cosa da' suoi veri principj.

7. Ad esprimere l'elevazione del Sole sopra l'Orizzonte, si suole usare la serie naturale de' numeri 0. 1. 2. 3. . . . E' certo che quando il Sole sta all'Orizzonte, l'elevazione sua sopra l'Orizzonte è nulla, o zero; quando s'è alzato sopra l'Orizzonte d'una determina a quantità presa per unità di paragone, per esempio d'un grado, la sua elevazione si può chiamare 1, e corso ch'egli abbia, alzandosi sempre più, un altro grado, la sua elevazione sarà 2, e così nel resto. Ad esprimere l'abbassamento del Sole sotto l'Orizzonte, si può usare la stessa serie, essendo zero il suo abbassamento quando egli sta all'Orizzonte, potendosi prendere per

5
per 1 il suo abbassamento, quando egli si sia depresso d'un grado . . . ec.

Quindi volendo riferire l'alzamento e l'abbassamento del Sole rispetto all'Orizzonte alla medesima misura di gradi d'un circolo; dinotati successivamente co' termini della serie naturale 0. 1. 2. 3. . . . si avrà sempre un'espressione ambigua, non intendendosi dal numero, per esempio, di 3 gradi, che il Sole si sia alzato o abbassato rispetto all'Orizzonte di gradi tre. I numeri hanno costantemente la loro significazione assoluta di 3, di 4. . . ., e da se non portano in conto alcuno la relativa d'essere l'1. 2. . . . preso piuttosto in questa, che in quella direzione, se non per qualche segno ad essi estrinseco, e preso ad arbitrio.

Per determinarla in qualche modo al numero de' gradi del moto, diretto ad una parte, si mette verso la sinistra il segno $+$, e quel numero de' gradi si chiama *positivo*; al numero de' gradi del moto, indirizzato alla parte opposta si mette verso la sinistra il segno $-$, e quel numero de' gradi si chiama *negativo*. Così il numero per se stesso esprimerà la quantità del movimento; il segno premesso al numero indicherà la direzione del movimento medesimo ad una delle parti opposte. Si dica lo stesso delle altre quantità (per esempio de' crediti e debiti d'un mercante; della sanità, o infermità di un cittadino . . .) che hanno tra se qualche opposizione, secondo un certo riguardo, non esprimibile da' puri numeri.

8. Quando due quantità sono tra se opposte secondo qualche rispetto, la prima esclude e nega l'altra secondo il rispetto medesimo; quindi la prima ha tratto il nome di quantità *negativa*, e la seconda di *positiva*. Ma siccome due quantità tra se opposte secondo qualche rispetto, si escludono e negano vicendevolmente secondo quel rispetto medesimo, si può prendere o l'una o l'altra per positiva, come più piace. Nell'esempio dell'elevazione o abbassamento del Sole, rispetto all'Orizzonte, tanto il primo si op-

si oppone al secondo, quanto questo al primo movimento; ambedue, o piuttosto qualsivoglia dei due si può prendere per positivo, lasciando l'altro per negativo. Ordinariamente tralle quantità così opposte, si prende per positiva quella che si presenta più naturalmente a considerarsi la prima; così l'elevazione del Sole sopra l'Orizzonte si suole prendere per movimento positivo, e l'abbassamento per negativo.

9. Non tutte le quantità hanno le sue opposte, e quantunque una quantità abbia la sua opposta, non è necessario di considerare questa opposta quantità. Le quantità numeriche, in quanto sono tali, non hanno quantità a se opposte; non il zero, che per non essere quantità non può dirsi opposto alle quantità; non le quantità minori del zero, che per non dare di se idea alcuna chiara e distinta, non possono neppure avere l'esistenza nella immaginazione; non... ec. Si può all'incontro considerare un alzamento del Sole secondo il suo accrescimento numerico qualunque, senza avere alcun riguardo alla quantità opposta, cioè all'abbassamento del Sole rispetto all'Orizzonte medesimo: quando però si dice $-a$, questa quantità non ha il suo essere di meno, che per l'apporsi che fa al $+a$. Quindi 1.° non tutte le quantità, in quanto sono tali quantità, possono avere i segni $+ -$, e le quantità, che non hanno il segno $-$ non sempre sono quantità positive, cioè non sempre racchiudono nella loro idea l'opposizione ad altre quantità, nè si chiamano positive, se non perchè vengono considerate e poste, dirò così, da se stesse; propriamente dovrebbero chiamarsi *puri numeri*. 2.° Le quantità, che hanno il segno $-$ sempre sono quantità negative, cioè sempre, e necessariamente presuppongono, o importano l'idea d'opposizione ad altre quantità, nè sono puri numeri, nè si ha di esse idea alcuna, se non vi s'attacchi qualche idea d'opposizione ad altre quantità. 3.° Tanto le quantità positive $+a$, quanto le negative $-a$ sono quantità reali; da che $+a -a$ non differiscono, che ne' segni,

segni, i quali non mutano la natura di a , ma solamente dinotano una diversa denominazione ad esso estrinseca, di direzione diversa... ec.

Regole de' segni $+ -$ nel Calcolo delle quantità positive, e negative.

10. **D**Al fin qui detto è manifesto, che la quantità positiva, o negativa porta seco due stati; cioè lo stato di numero, e lo stato di qualche opposizione o contrarietà; secondo il suo stato numerico, essa è una tale o tale altra quantità, 1. 2. 3... ec., secondo il suo stato di opposizione (che ben si può chiamare stato *specifico*) è di più una cert' altra cosa opposta ad un' altra simile, che per avventura si scuopra in una nuova data quantità. Lo stato numerico d'una quantità si dinota co' numeri 1. 2... ec.; lo stato specifico della medesima si indica co' segni $+ -$. Quindi nel calcolo delle quantità positive o negative, oltre al trovare i risultati delle date quantità considerate nel loro stato numerico, è mestieri assegnare lo stato specifico, in cui collocare si debbano i risultati, cioè il segno $+ -$ da premetterli ai medesimi. Lo stato numerico de' risultati si conosce dalle regole ordinarie del calcolo; lo stato specifico de' medesimi si conoscerà dalle regole seguenti.

11. Regole de' segni. 1.° La quantità negativa aggiunta ad una negativa, la aumenta nella sua negazione, sottratta la scema. 2.° La quantità negativa aggiunta ad una positiva la scema nella sua posizione, sottratta la aumenta. 3.° La quantità positiva aggiunta ad una negativa la scema nella sua negazione sottratta la aumenta. 4.° La quantità positiva aggiunta ad una positiva la aumenta, sottratta la scema. 5.° La quantità negativa di una negativa, o la positiva di una positiva è una quantità positiva, come pure la quantità positiva della negativa, o la negativa di una positiva è una quantità negativa. Quest'ultima proprietà delle quantità precedute da segni $+ -$ si può esprimere così:

$-- = +$.. meno il meno dà più
 $+ + = +$ più il più dà più
 $- + = -$ meno il più dà meno
 $+ - = -$ più il meno dà meno .

Tutte queste regole de' segni sono conseguenze manifeste dall'idea di opposizione che regna nelle quantità precedute da' segni $+ e -$; basterebbe applicarle a qualche esempio d'alzamento e d'abbassamento del sole rispetto all'orizzonte, per renderle chiare e palpabili anche alle persone più rozze, e volgari. Quale è lo stato contrario al *discendere*? certo è l'*ascendere*; ciò intendo di dire quando noto che *meno il meno dà più*; qual è... ec.?

12. Quindi, e dalla natura della moltiplicazione e divisione si hanno le regole de' segni per la moltiplicazione, e divisione delle quantità positive e negative, cioè:

$- \times - = +$ $- \div + = -$
 $+ \times + = +$ $+ \div - = -$

ossia i segni simili danno *più*, i segni dissimili danno *meno*. Imperciocchè; il moltiplicatore non mostra solamente quante volte si debba a se stesso aggiungere il moltiplicando, ma in quale stato ancora si debba riporre il prodotto; ed il divisore non solamente indica qual parte si debba prendere del dividendo, ma in quale stato si debba riporre questa parte medesima; conseguentemente, dovendosi questo stato intendere in ordine a quello in cui già si ritrova il moltiplicando ed il dividendo, se essi sieno negativi, e collocare si debbano in uno stato negativo, il prodotto ed il quoto avranno uno stato negativo del negativo, cioè positivo, e se si debbano collocare in uno stato positivo, avranno uno stato positivo del negativo, cioè negativo. Se il moltiplicando ed il dividendo sieno positivi, e collocare si debbano in uno stato negativo, il prodotto ed il quoto avranno uno stato negativo del positivo, cioè negativo, e se si deb-

si debbono collocare in uno stato positivo, avranno uno stato positivo del positivo, cioè positivo. Quindi lo stato del prodotto

$a b$ di $- a \times - b$ sarà $-- = +$

di $- a \times + b$ sarà $+ - = -$

di $+ a \times - b$ sarà $- + = -$

di $+ a \times + b$ sarà $+ + = +$. Lo stato del quoto $\frac{a}{b}$ per ... ec.

13. Quindi. Nella moltiplicazione; 1.º Se il moltiplicatore sarà negativo, il prodotto avrà un segno contrario a quello del moltiplicando. 2.º Se il moltiplicatore sarà positivo, il prodotto avrà il segno del moltiplicando. 3.º Se le quantità a moltiplicarsi faranno pari in numero, e ciascuna negativa, il prodotto sarà positivo. 4.º Se faranno impari, e ciascuna negativa, il prodotto sarà negativo. 5.º O sieno pari, o sieno impari in numero le quantità positive, il loro prodotto sarà sempre positivo.

Nella divisione. 1.º Se il dividendo sarà negativo, il segno del quoto sarà contrario del segno al divisore. 2.º Se il dividendo sarà positivo, il segno del quoto sarà conforme al segno del divisore. 3.º ... ec. Queste ed altre simili annotazioni, se non servono alla pratica del calcolo, servono a meglio conoscere la natura de' segni.

14. Ma, come va (dicono alcuni) che i segni $+ -$ si usano da' Matematici (e noi pure lo abbiamo indicato al num. 2.) per l'addizione e sottrazione de' numeri? che hanno esse mai di comune le quantità aggiunte o sottratte, colle quantità positive o negative? quali saranno le regole de' segni nel calcolo, non delle quantità positive e negative, ma delle quantità aggiunte e sottratte? Questi sono i nodi, da' quali non fanno svolgersi i meno esperti.

Due però sono le risposte: 1.º La natura de' numeri non esige che vengano essi ad altri aggiunti o sottratti; dunque il considerare i numeri nello stato di addizione o sottrazione rispetto ad altri numeri, è un fissare a' numeri medesimi un nuovo stato ad essi estrinseco; stato, che considerato in ordine

all' effetto che produce nelle quantità, alle quali vengono aggiunti, o dalle quali si sottraggono, è in se stesso perfettamente opposto. Certo che altra è la mutazione introdotta in una quantità per l'addizione, altra è quella che in essa si genera per la sottrazione d'un'altra quantità, e la prima è affatto opposta alla seconda: Se la prima è mutazione in accrescimento, che si può dire mutazione *in più*; la seconda è mutazione di scemamento, che si può dire mutazione *in meno*; dunque i numeri in quanto aggiunti ad altri si possono, e si devono considerare come quantità positive, in quanto da altri sottratti si possono, anzi si devono considerare come quantità negative; dunque a quegli si dovrà premettere il segno +, a questi il —, e si dovranno maneggiare nel calcolo come le altre quantità positive e negative. Quindi è manifesto, che il calcolo delle quantità aggiunte o sottratte, non è che un ramo del calcolo delle quantità positive e negative; i segni + e — sono segni proprj a denotare lo stato di contrarietà, che regna tra due quantità date (queste quantità sono il *genus*), e per parità di ragione si devono appropriare alle quantità aggiunte e sottratte, che sono *species* di quelle prime.

2.^o Si astragga per poco la mente da ciò che si è detto sulla natura delle quantità positive e negative, e sulle regole de' segni + —. Sia il + un mero segno arbitrario dell' addizione, ed il — un segno arbitrario della sottrazione; cerchiamo quali sieno le regole da osservarsi nel calcolo per le quantità insieme congiunte, o sottratte con questi segni.

Nella sottrazione. Sottraendo 14—3 da 25, si ha 25—(14—3) = 25—14+3. Imperciocchè dal numero 25 non vuol si sottratto tutto il numero 14, ma il 14 sminuito di 3; dunque troppo piccolo è il residuo 25—14, e tanto più piccolo, quanto il minore 14 è più grande del dovere, cioè il residuo 25—14 è più piccolo di 3 di quello dovrebbe essere; dunque per avere il vero residuo di 14—3 sottratto da 25, conviene aggiungere 3 a 25—14; dunque

dunque 25—(14—3) = 25—14+3. Quindi $\begin{matrix} -+ = - \\ -- = + \end{matrix}$
 similmente si avrà 25+(14—3) = 25+14—3; cioè $\begin{matrix} ++ = + \\ +- = - \end{matrix}$

Nella moltiplicazione. Moltiplicando 14—3 per 5—2, si ha (14—3) × (5—2) = (14 × 5—3 × 5) + (3 × 2—14 × 2). Imperciocchè, se il moltiplicatore fosse l'intero numero 5, il prodotto sarebbe (14—3) × 5; cioè non sarebbe l'intero numero 14, che dovrebbe moltiplicare per 5, ma il numero 14 sminuito di 3; dunque moltiplicando 14 per 5 si moltiplicherebbe per 5 anche il 3 che sta, e non dovrebbe esservi, nel numero moltiplicando; dunque 14 × 5 sarebbe maggiore del dovere di tutto il numero 5 × 3; dunque il prodotto vero sarebbe 14 × 5—5 × 3. Non è il numero intero 5 che deve moltiplicare 14—3, ma il numero 5 sminuito di 2; dunque nel prodotto 14 × 5—5 × 2 c'è di più il prodotto di 14—3 moltiplicato per 2; dunque per avere il vero prodotto di (14—3) × (5—2) si deve dal prodotto 14 × 5—5 × 2 sottrarre il prodotto di (14—3) × 2, cioè si deve sottrarre 14 × 2—3 × 2; dunque, per le regole date nell' esempio della sottrazione, il vero prodotto farà (14 × 5—5 × 3) + (3 × 2—14 × 2).
 Quindi $\begin{matrix} ++ = + \\ -x = - \end{matrix}$; $\begin{matrix} -x = - \\ +x = - \end{matrix}$.

Un simile discorso vale per la divisione.

15. Ecco adunque, che prendendo per segno arbitrario dell' addizione il +, e della sottrazione il —, dalla sola natura delle operazioni aritmetiche si hanno per il calcolo delle quantità sommate, e sottratte le stesse regole, che si ebbero già per le quantità positive e negative; dunque, quantunque le quantità sommate e sottratte non fossero da annoverarsi tralle quantità positive e negative, si dovrebbero maneggiare nel calcolo come le quantità positive e negative; cioè comunque diversi da + — fossero i segni dell' addizione e sottrazione, le loro regole nel calcolo

colo farebbero sempre analoghe alle regole de' segni $+$ $-$ presi per le sole quantità positive e negative; dunque e si possono prendere questi segni $+$ $-$ per indicare la somma e la sottrazione, e si possono, alle quantità sommate e sottratte, adattare le regole de' segni, dedotte prima per le quantità positive e negative.

16. La prima risposta è più decisiva, e leva ogni imbarazzo ne' calcoli; chi sostiene l'altra, dovrà in primo luogo sempre distinguere due generi di quantità positive e negative; cioè quello che viene dalla opposizione di stato, e quello che nasce dall'addizione e sottrazione delle quantità date. 2.^o Dovrà nella risoluzione de' problemi esaminare ogni risultato che abbia il segno $-$, per conoscere se abbia questo segno perchè si richiami all'opposizione d'un'altra quantità simile che sia stata presa per positiva, o perchè ciò portino solamente le regole dell'addizione e sottrazione. Nel primo caso saprà l'uso che deve farsi del risultato, non lo saprà nel secondo, o se voglia anche nel secondo caso adattarvi le regole del primo, contraddirà col fatto alla sua dottrina. 3.^o Commetterà poi un errore inescusabile e pericoloso, se vorrà ridurre l'idea delle quantità positive e negative del primo genere, all'idea delle quantità sommate, o sottratte, quasi che quella dipenda da questa. E' vero che il numero -3 gradi di elevazione del Sole si ha aggiungendo 8 gradi d'abbassamento, a 5 gradi d'elevazione del Sole medesimo, ma non è necessario per avergli ricorrere a questa somma; cioè a dire, è possibile, ma non è necessario, che quel -3 venga da un'addizione.

Riduzione delle quantità algebriche.

17. **L**A riduzione delle quantità algebriche consiste nel disporre col miglior ordine, e sotto la più semplice espressione, le quantità algebriche o date o trovate colle consuete operazioni del calcolo. Si osservino perciò le regole seguenti:

Re-

Regola prima. Le lettere di ciascun termine si dispongano più che si può coll'ordine alfabetico.

Regola seconda. I termini delle quantità complesse si ordinino relativamente alle dimensioni di qualche lettera.

Regola terza. Si riducano ad una sola le quantità incomplete simili, che per avventura si trovino co' segni simili in una complessa quantità data, e si ommettano quelle, che si distruggono o si elidono co' segni contrarj.

Regola quarta. Si conservi in ciascun termine la legge degli omogenei.

18. Per riguardo alla prima regola, è chiaro, che la quantità $a c f b d$ si deve scrivere così $a b c d f$, succedendo all' a nell'ordine alfabetico il b , e non il c , nè al b l' f , ma il c ... ec S'è detto, che devonfi così disporre le lettere per quanto si può; cioè a dire quando ciò non turbi la seconda regola dell'ordinare le quantità complesse.

19. Per osservare con facilità questa seconda regola, si ordini primamente ciascun termine della quantità data per riguardo ad una lettera comune a molti; poi si passi ad ordinare i termini tra se, per riguardo alle dimensioni della lettera ordinante. Mi spiego: Nella quantità complessa $a^3 - 3 a b c - b^2 c + 2 a^2 c - a^2 b$ io osservo, che la lettera a è in tutt' i termini, fuorchè nel terzo; prendo ad arbitrio questa lettera a per distintivo de' termini medesimi, e si gli dispongo, che la lettera a stia in ciascuno di questi più verso la mano destra, che non le altre; scrivo a cagione d'esempio non $- a^2 b$, ma $- b a^2$; non $- 3 a b c$, ma $- 3 b c a$... , così farà ordinato ciascun termine della quantità proposta. Per ordinare tra di loro i termini medesimi, scrivo per primo termine verso la sinistra quello, in cui la lettera a si trova alla maggior dimensione; scendendo verso la destra scrivo quello, in cui quest' istessa lettera a si trova alla dimensione prossimamente minore della prima... , e così successivamente, fino a quegli che

che non contengono la lettera a ; questi saranno gli ultimi. Ordinando la predetta quantità complessa, si avrà $a^3 + 2ca^2 - ba^2 - 3bca + b^3$.

20. Nelle quantità così ordinate per rapporto alle dimensioni d'una lettera, si chiama *termine* il complesso di tutte quelle quantità incomplete, in cui la lettera che le distingue, ascende al medesimo numero di dimensioni, e tutte queste quantità incomplete, si scrivono l'una sotto l'altra; la quantità precedente conterrà dunque soli quattro termini, e si scriverà così $a^3 + 2ca^2 - 3bca + b^3$; per non iscostrarci dalla definizione $- ba^2$

della parola *termine* data sopra, si consideri l'aggregato di tutte le quantità incomplete che stanno a sinistra di a^3 nella quantità così ordinata, come coefficiente di a^3 ; si vedrà in appresso che si ha $2ca^2 - ba^2 = (2c - b)a^2$.

21. Talvolta gli esponenti delle dimensioni della lettera che distingue i termini non vanno da sinistra a destra sminuendo successivamente d'un unità. In questo caso, se sia eguale la differenza del primo esponente al secondo, del secondo al terzo, ... si supponrà bene ordinata la quantità data, altrimenti si metterà frammezzo un asterisco *, o un altro segno simile per supplire le veci del termine che manca: la quantità $a^6 + b^3 a^4 - b^4 a^2 + b^6 + a^1 b^3 * * + a^5$, ed in questa quantità, il secondo, il quinto, ed il sesto termine sono eguali a zero, o più veramente a \pm zero moltiplicato per b^3 nel secondo, per b^5 nel quinto, e per b^6 nel sesto termine.

22. E' manifesto che la terza regola per le riduzioni abbraccia tre casi. 1.° Le quantità incomplete simili, che hanno il medesimo segno, si riducono ad una sola che ha il segno comune alle date, e per coefficiente la somma de' coefficienti delle medesime. La quantità $2a^3 + 3b + a^3$ si riduce a $(2+1)a^3$

+

$+ 3b = 3a^3 + 3b$. 2.° Se queste incomplete quantità simili hanno i segni contrari, il segno della quantità maggiore sarà il segno della ridotta, che avrà per coefficiente la differenza de' coefficienti delle quantità date. La quantità $3ab^2 + 2ab^2 - ab^2$ si riduce a $(3-1)ab^2 + 2ab^2 = 2ab^2 + 2ab^2$. 3.° Quindi se i coefficienti delle quantità simili che hanno i segni contrari sono tra se eguali, si omettono interamente le quantità date; $3ab + 2cd - 3ab = 2cd$.

23. Si dicono di *dimensioni omogenee* quelle quantità incomplete, che hanno il medesimo numero per esponente delle dimensioni; di *dimensioni eterogenee* le altre. La quantità ab è omogenea a cd , e siccome detto è, che i coefficienti non mutano le dimensioni d'una quantità, così non ne turbano l'omogeneità, o vi siano, o manchino nelle quantità date; $4ab$ è omogeneo con $10cd$. Quindi in una equazione sono omogenei i termini che la compongono, quando la somma delle dimensioni delle lettere in ciascun termine, è eguale alla somma degli esponenti delle lettere negli altri. L'equazione $a^2 x^2 + a^2 y^2 = 0$ è omogenea. E' molto necessario, massime nella soluzione de' problemi, il rendere omogenei tutt' i termini d'una equazione, o d'una complessa quantità; ciò si chiama *conservare*, ovvero *osservare la legge degli omogenei*.

24. Due sono i metodi più usati per ridurre all'omogeneità i termini d'una data quantità complessa. Primo metodo, per mezzo dell'unità. Si moltiplichino il termine che ha minori dimensioni, o si divida quello che ne ha maggiori, per l'unità, fatta eguale a qualche lettera che non entri nella quantità data, o che tralle date si possa prendere per l'unità. A rendere omogenei i termini di $abc + cd$, si moltiplichino cd , o si divida abc per $f = 1$; si avrà nel primo caso $abc + cdf$, e nel secondo caso $\frac{abc}{f} + cd$.

o che

f

Secondo metodo, per mezzo delle sostituzioni. Egli è chiaro, anche senza avvertirlo, che in una quantità qualunque, invece d'una o più lettere, se ne può inferire una o più altre, che sieno, o si suppongano eguali a quelle; appunto come se la distanza da un luogo ad un altro sia di due tese lineari, si può egualmente dire che è di dodici piedi lineari. Su questo principio (chiamato *principio di sostituzione*) si fondano tutte quasi le regole dell'Analisi; vero è che per fare le sostituzioni nelle quantità algebriche, è uopo sapere prima il calcolo delle medesime; ma noi accenniamo qui il metodo di cui abbisogniamo nel decorso, la pratica la riservi ciascuno a miglior luogo. Nella quantità $a + bxy + cx^2y^2 + ex^3y^3$, si faccia $y = \frac{z}{x}$ si avrà $a + \frac{bx}{z} + \frac{cx^2}{z^2} + \frac{ex^3}{z^3}$ quantità omogenea; nella quantità $x^2 + z^2 + az$, si faccia $z = y^2$, farà $x^2 + y^2 + ay^2$ quantità omogenea. .. ec. Colle sostituzioni si rendono omogenei i termini massime nelle equazioni, col cambiare gli esponenti della equazione proposta, con una certa legge; e si può determinare in quali casi, e con quali sostituzioni si debbano o possano fare somiglianti trasformazioni, ciocchè non si può qui spiegare più a lungo.

25. Resta a dimostrare, che ne' metodi precedenti le quantità $\frac{bx}{z}, \frac{cx^2}{z^2}$, e simili sieno d'una sola dimensione, e lo stesso argomento varrà per gli altri casi. Ciò dipende dal teorema generale per trovare l'esponente delle dimensioni d'una frazione algebrica; egli è il seguente. L'esponente delle dimensioni di una frazione algebrica è eguale al residuo, che si ha sottraendo l'esponente delle dimensioni del denominatore dall'esponente delle dimensioni del numeratore; questo teorema si dimostra facilmente così: ab , che è un prodotto de' due fattori a, b , è di due dimensioni, e se si divida ab per uno de' fattori a , resta b per

per quoziente che è d'una sola dimensione; dunque quante sono le dimensioni al denominatore d'una frazione, altrettante se ne elidono al numeratore, e l'esponente delle dimensioni residue è la differenza de' detti esponenti; dunque le dimensioni d'una frazione sono indicate dalla detta differenza; quindi è, che essendo due le dimensioni al numeratore di $\frac{bx}{z}$, ed una al denominatore, l'esponente delle dimensioni di $\frac{bx}{z}$ farà $2-1$, cioè l'unità, e così nel resto.

26. Si noti 1.^o Che se il denominatore avrà più dimensioni che il numeratore, l'esponente delle dimensioni delle frazioni farà negativo; e se il denominatore avrà egual numero, o un numero minore di dimensioni che il numeratore, l'esponente delle dimensioni della frazione farà zero, o positivo. Le frazioni d'esponente negativo si chiamano, da Eulero, e da altri, *frazioni proprie*. 2.^o Che colle regole date, ed applicate solamente alle quantità incomplete, si conosce l'esponente delle dimensioni d'una quantità complessa; il numero de' fattori, che la compongono, (che sono rappresentabili da a, b, c , ec.) è l'esponente delle sue dimensioni. Dimosteremo altrove, che in una quantità omogenea, ed ordinata per una lettera, il numero de' fattori componenti è eguale all'esponente massimo di quella lettera; così $x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3$ è di tre dimensioni. 3.^o Quindi si ha l'esponente delle frazioni, che hanno per numeratore, e per denominatore una quantità complessa.

CAPO SECONDO.

Leggi del Calcolo nelle quantità algebriche.



Calcolo nelle quantità intere.

27. **A**ddizione. Si scrivano tutte le date quantità in una sola serie, da sinistra a destra, ritenendo il segno dato a ciascun termine; si facciano su questa serie le riduzioni del n. 22. Per sommare $a \mp bc$ con $bc - a$, si scriva $a \mp bc \mp bc - a$, e riducendo si avrà $2bc$.

28. Sottrazione. Si mutino tutti i segni nel minutore, e si sommino insieme tutte le date quantità. Per sottrarre $ac - b$ da $d \mp b \mp ac$, si mutino i segni ad $ac - b$, e sommando $-ac \mp b$ con $d \mp b \mp ac$, si avrà $d \mp 2b$.

29. Moltiplicazione. Per le quantità incomplete, conviene trovare il prodotto delle lettere, il prodotto de' coefficienti numerici, ed il segno da premettervi. Per le lettere, basta congiungere le lettere delle quantità a moltiplicarsi colle lettere dell'altra quantità, senza interporvi alcun segno; per i coefficienti numerici servono le regole della volgare aritmetica ne' numeri; per i segni ritengansi le regole sopra dimostrate, cioè che il segno del prodotto è \mp , se sono simili i segni delle quantità date, e che il segno del prodotto è $-$ se i segni delle date quantità sono dissimili. Moltiplicando $4bc$, ossia $\mp 4bc$ per $-5ad$, si avrà
 1.° Per le lettere $bc \times ad = abcd$; 2.° Per i coefficienti $4 \times 5 = 20$;
 3.° E per segno del prodotto $20 abcd$ si ha $- \times \mp = -$; cioè $4bc \times -5ad = -20abcd$.

Per le quantità complesse, finitinomie, ed indefinitinomie. Si moltiplichino colle regole precedenti tutt' i termini d'una delle date quantità per ciascun termine dell'altra; si faccia la somma di tutt' i parti-

particolari prodotti. Moltiplicando $a - b$ per $c - d$, si avrà $(a - b)(c - d) = (a - b) \times c + (a - b) \times -d = (ac - bc) + (bd - ad)$.

30. Divisione. Per le quantità incomplete. Il coefficiente numerico del quoziente, si ha colle regole dell'aritmetica numerica; il segno del quoto si ha come nella moltiplicazione; per le lettere; si scrivano le lettere del divisore sotto le lettere del dividendo a modo di frazione; si scancellino le lettere comuni ad amendue i termini; così $\mp 6bc$ diviso per $-3c$, dà per segno del quoto $\mp \div - = -$; per coefficiente del quoto $\frac{6}{3} = 2$, e per le lettere $\frac{bc}{c} = b$; cioè $6bc \div -3c = -2b$. Ho detto di scancellare le lettere comuni; dacchè è evidente, che bc è eguale a b moltiplicato per c ; dunque dividere bc per c significa dividere un prodotto per uno de' suoi fattori, che anche nella aritmetica numerica dà l'altro fattore per quoto.

Per le quantità complesse finitinomie. Si ordini il dividendo ed il divisore per una istessa lettera; si divida il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore; si sottragga dal dividendo, il prodotto del quoto in tutto intero il divisore; e sulle quantità residue si rifaccia la stessa operazione, fino ad avere zero per residuo, o una quantità non più divisibile per il divisore, da scriversi a modo di frazione a compimento del quoto, come ne' numeri. A dividere $a^2 - b^2$ per $a \mp b$, stando amendue le quantità ordinate per a ; si divida il primo termine a^2 del dividendo per il primo termine a del divisore, e si scriva a per quoto; sottraendo da $a^2 - b^2$ il prodotto di $a \mp b$ in a , si ha $-ab \mp b^2$ per residuo, su cui operando come se fosse un nuovo dato dividendo, si avrà $-b$ per secondo ed ultimo termine del quoziente.

Per le quantità complesse infinitinomie. Si stabilisca prima d'ogn'altra cosa il numero de' termini, che si vogliono avere nel quoziente, e si scrivano altrettanti termini del dividendo A, e del divisore B al luogo della divisione; si ordinino al contrario delle quantità finite (cioè si metta per primo termine quella quantità

incompleta, in cui la lettera, che distingue i termini, ascende al più piccolo numero di dimensioni), e si operi come nelle quantità finite.

Calcolo delle quantità intere per mezzo degli esponenti.

31. **S**I chiama *calcolo delle quantità intere per mezzo degli esponenti* il calcolo delle quantità, che hanno la forma a^m, a^n , fatto per mezzo de' loro esponenti. Le regole di questo calcolo sono soltanto per la moltiplicazione e per la divisione, e si deducono da n. 29. 30. Dal n. 29. si ha $a^2 \times a^3 = a a a \times a a = a a a a a = a^5$; ma $a^5 = a^{2+3}$; dunque $a^2 \times a^3 = a^{2+3}$ quindi $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

Dal n. 30. $a^5 : a^3 = \frac{a^5}{a^3} = \frac{a a a a a}{a a a} = a a = a^2$; ma $a^2 = a^{5-3}$; dunque

$$a^5 : a^3 = a^{5-3}; \text{ quindi } a^m : a^n = a^{m-n}$$

Cioè la somma degli esponenti m, n , è l'esponente del prodotto di $a^m a^n$, e la differenza dell'esponente n dall'esponente m è l'esponente del quoto di $\frac{a^m}{a^n}$.

32. Quindi l'esponente delle dimensioni di a può essere positivo, negativo, o zero, secondo che in a^{m-n} farà n minore, maggiore, o eguale ad m . Quindi ancora 1.º $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$;

2.º $a^0 = 1$; dacchè moltiplicando a^{-m} ed $\frac{1}{a^m}$ per la stessa quantità a^m , si ha $a^{-m} \times a^m = a^m$; $\frac{1}{a^m} \times a^m = a^m$; Ed $a^0 \times a^m = a^{0+m} = a^m$; cioè moltiplicando una quantità per a^0 , non si muta il valore che aveva prima, cioè è proprio dell'unità. Queste due ultime proposizioni, si provano ancora altrimenti così:

$$\frac{a^5}{a^7} = \frac{1}{a^2}; \text{ ma } \frac{a^5}{a^7} = a^{5-7} = a^{-2}; \text{ dunque } a^{-2} = \frac{1}{a^2}; \text{ in-$$

noltre

noltre $\frac{a^5}{a^5} = 1$; ma $\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0$; dunque $a^0 = 1$.

Nota. La potenza a^{-n} sta al numeratore della frazione $\frac{a^{-n}}{1}$ che è eguale alla frazione $\frac{1}{a^n}$ in cui a^n sta al denominatore; or questa

opposizione di sito, che passa trallo stare al numeratore, e lo stare al denominatore d'una frazione, viene acconciamente designata dal segno dell'esponente, che in un caso è $+$, e nell'altro $-$. Vedi Fontenelle (*Geom. de l'infini* n. 480.)

Calcolo nelle frazioni.

33. **R** Appresentando due qualunque frazioni con $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, si avranno le seguenti formole.

Addizione. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

Sottrazione. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$

Moltiplicazione. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Divisione. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

34. Esitano alcuni sulla regola per la divisione; ecco come si dimostra. Suppongo che moltiplicando i termini d'una frazione per una stessa quantità, non si muta il valore della frazione; così $\frac{1}{2}$ è eguale a $\frac{2}{4}$, cioè a $\frac{1 \times 2}{2 \times 2}$; Suppongo inoltre che la vera espressione del quoto di due quantità sia una frazione che ha il dividendo per numeratore, ed il divisore per denominatore; Or dico, che per dividere una frazione per un'altra, si devono rovesciare i termini del divisore, e moltiplicare il dividendo, per il divisore così ridotto; cioè che

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Imperciochè $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, e moltiplicando i termini di quest'

ultima frazione per il prodotto de' denominatori delle date, cioè

$$\text{per } bd, \text{ si ha } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{abd}{b}}{\frac{bcd}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

Calcolo delle frazioni per mezzo degli esponenti.

35. **S**'E' già notato (num. 32.) che il segno —, messo avanti l'esponente d'una quantità qualunque dinota opposizione di sito, cioè che la data quantità fatta d'esponente positivo appartiene a quel termine della frazione, che è opposto al termine, in cui trovasi essa collocata; giusta la natura del segno —, che indica sempre qualche opposizione, o contrarietà, a differenza del +, che nell'uso dinota talvolta una semplice posizione d'una quantità; quindi $\frac{a^m}{a^n} = a^m \times a^{-n}$

$$\frac{a^m}{a^{-n}} = a^m \times a^n$$

36. Quindi si ha un metodo per calcolare la quantità intera a modo di frazioni, e le frazioni a modo delle quantità intere; ma per fermarci solamente nelle frazioni, si ha

$$\text{Addizione.} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ab^{-1} + cd^{-1}$$

$$\text{Sottrazione.} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = ab^{-1} - cd^{-1}$$

$$\text{Moltiplicazione.} \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = ab^{-1} \times cd^{-1}$$

Di-

$$\text{Divisione.} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ab^{-1} : cd^{-1}$$

37. Quindi si ha un'elegante dimostrazione delle ordinarie regole per la moltiplicazione e divisione nelle frazioni.

$$\begin{aligned} 1.^{\circ} \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd}; \text{ dacchè } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = ab^{-1} \times cd^{-1} = acb^{-1}d^{-1} \\ &= \frac{ac}{bd}. \quad 2.^{\circ} \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}; \text{ dacchè } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ab^{-1} : cd^{-1} \\ &= \frac{ab^{-1}}{cd^{-1}} = \frac{ad}{bc}. \end{aligned}$$

Estrazione delle radici dalle quantità Algebriche.

38. **D**ato il prodotto d'una quantità sconosciuta qualunque, e continuamente moltiplicata per se stessa un dato numero di volte; trovare la quantità moltiplicata. Il dato prodotto si chiama *potenza* della quantità che si cerca; la quantità che si cerca si chiama *radice* della potenza il dato numero di volte per cui s'è fatta la moltiplicazione, si chiama *esponente* del grado della potenza, e della radice. Rappresentando per a qualunque quantità complessa, o incomplessa, intera, o rotta, farà $a \times a$ la seconda potenza di a , ed a la radice seconda di $a \times a$; $a \times a \times a$ farà la terza potenza di a , ed a la radice terza di $a \times a \times a$. . . ec.

39. La soluzione del presente problema di trovare, od estrarre la radice da una data potenza, non ha difficoltà alcuna per le quantità incomplesse; è evidente 1.° Che la potenza d'una quantità incomplessa è il prodotto delle potenze de' suoi fattori; la seconda potenza di bc , è $bc \times bc = b^2 c^2$, e ciò torna allo stesso che moltiplicare per l'esponente della potenza cercata l'esponente di ciascun fattore della quantità data; per converso adunque ed estrarre la radice d'esponente dato da una potenza incom-

complessa, si dovrà dividere l'esponente di ciascun fattore per l'esponente della radice cercata; così la radice seconda di $b^2 c^2$,

$$\sqrt[2]{b^2 c^2} = bc.$$

E' evidente in 2.^o luogo che le potenze d'esponente pari d'una quantità negativa, e le potenze di esponente pari o impari d'una quantità positiva sono sempre positive; e che le potenze d'esponente impari d'una quantità negativa sono sempre negative; quindi per converso le radici d'esponente impari d'una potenza negativa sono negative; le radici d'esponente impari d'una potenza positiva sono positive; le radici d'esponente pari d'una potenza positiva sono e positive e negative; e le radici d'esponente pari d'una potenza negativa non sono nè positive, nè negative, cioè sono immaginarie, ovvero impossibili.

Finalmente 3.^o quanto a' coefficienti; se i coefficienti delle date potenze incomplete di grado n non sono composti più di un numero n di figure, cercando tralle potenze delle semplici figure aritmetiche il coefficiente della data quantità, si troverà senza pena la sua radice; serve a ciò la Tavola prima delle potenze de' numeri semplici. Se i coefficienti delle date potenze incomplete sono composti di più figure che non sono unità in n , si dovrà cercare la loro radice coi metodi delle potenze complesse.

Cercando la radice seconda di $36 b^2 c^2$, si avrà 1.^o $\sqrt[2]{b^2 c^2} = b c$; 2.^o La radice seconda di 36 è 6; il segno è \pm ; cioè disegnando col segno \surd la radice seconda cercata; si avrà $\sqrt[2]{36 b^2 c^2} = \pm 6 b c$.

40. L'estrazione delle radici nelle quantità complesse si deduce dalla formazione delle potenze nelle quantità medesime; bastano però a servire di formole le potenze d'un binomio qualunque rappresentato per $a + b$. Si moltiplichi $a + b$ per se stesso, e si avrà la seconda potenza di $a + b$; si moltiplichi la seconda

po-

Delle potenze de' numeri semplici.

Delle potenze de' numeri semplici.

	Radice, o lato sem- plice.	Quadrato, o seconda potenza.	Cubo, o terza po- tenza.	Quadrato quarto, o quarta potenza.	Storfolio, o quinta potenza.	Quadrato cubo, o cubo-quadrato, sesto potenza.	Sesto storfolio, o settima potenza.	Quadrato quinta- to, o ottava poten- za.	Cubo cubo, o nona potenza, ecc.
	Et. (2)	sq. (3)	cu. (4)	qu. (5)	qu. (6)	sq. (7)	sq. (8)	sq. (9)	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512	
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696	
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607	
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728	
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489	

TAVOLA SECONDA.

Delle potenze del binomio a+b.

$$\begin{aligned}
 1^a + & 0 \\
 1^a + & 1 \quad b \text{ prima potenza, o radice.} \\
 a^2 + & 2 a b + \quad b^2 \text{ 2}^a \text{ pot.}^a \\
 a^3 + & 3 a^2 b + 3 a b^2 + \quad b^3 \text{ 3}^a \text{ pot.}^a \\
 a^4 + & 4 a^3 b + 6 a^2 b^2 + 4 a b^3 + \quad b^4 \text{ 4}^a \text{ pot.}^a \\
 a^5 + & 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + \quad b^5 \text{ 5}^a \text{ pot.}^a \\
 a^6 + & 6 a^5 b + 15 a^4 b^2 + 20 a^3 b^3 + 15 a^2 b^4 + 6 a b^5 + \quad b^6 \text{ 6}^a \text{ pot.}^a \\
 a^7 + & 7 a^6 b + 21 a^5 b^2 + 35 a^4 b^3 + 35 a^3 b^4 + 21 a^2 b^5 + 7 a b^6 + \quad b^7 \text{ 7}^a \text{ pot.}^a \\
 a^8 + & 8 a^7 b + 28 a^6 b^2 + 56 a^5 b^3 + 70 a^4 b^4 + 56 a^3 b^5 + 28 a^2 b^6 + 8 a b^7 + \quad b^8 \text{ 8}^a \text{ pot.}^a \\
 a^9 + & 9 a^8 b + 36 a^7 b^2 + 84 a^6 b^3 + 126 a^5 b^4 + 126 a^4 b^5 + 84 a^3 b^6 + 36 a^2 b^7 + 9 a b^8 + \quad b^9 \text{ 9}^a \text{ pot.}^a \\
 a^{10} + & 10 a^9 b + 45 a^8 b^2 + 120 a^7 b^3 + 210 a^6 b^4 + 252 a^5 b^5 + 210 a^4 b^6 + 120 a^3 b^7 + 45 a^2 b^8 + 10 a b^9 + \quad b^{10} \text{ 10}^a \text{ pot.}^a
 \end{aligned}$$

potenza di $a + b$ per la sua radice, e si avrà la terza potenza di $a + b$, come nella tavola seconda. Per vedere l'uso di queste formole per l'estrazione delle radici, sia meglio applicarle ad un esempio.

Si cerchi la radice seconda di $x^2 + 2bx + 2ix + 2bi + b^2 + i^2$ ordinata per x . La seconda potenza di $a + b$ è $a^2 + 2ab + b^2$; discorro così: 1.º Per avere la prima parte della radice di questa formola, che altronde so essere a , basta estrarre la radice seconda dal primo termine a^2 della formola medesima, ordinata per a ; essendo $\sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a$; dunque per avere la prima parte della radice cercata, che è rappresentabile per a , basterà estrarre la radice seconda dal primo termine x^2 , e si avrà x . 2.º Per avere la seconda parte radicale b della formola, basta sottrarre dalla medesima il quadrato della prima parte a , e dividere il primo termine $2ab$ del residuo $2ab + b^2$, per il coefficiente di b , cioè per $2a$; dunque per avere la seconda parte radicale cercata, che è rappresentabile per b , si dovrà sottrarre dalla data quantità il quadrato x^2 della prima parte x già trovata, e dividere il primo termine $2bx$ del residuo $2bx + 2ix + 2bi + b^2 + i^2$ per $2x$, cioè per $2x$; si avrà b . 3.º Sottraendo dal residuo della formola il prodotto di b , moltiplicato per la somma del divisore, e della seconda parte radicale b , cioè sottraendo $(2a + b)b$, si ha zero per residuo; dunque se la radice della data potenza è binomia, sottraendo dal residuo predetto la quantità rappresentata per $(2a + b)b$, cioè $(2x + b)b$, si dovrà avere zero per residuo; ed avendo invece il residuo $2xi + 2bi + i^2$, si ha un segno sicuro, che la radice cercata non è binomia, e che colle precedenti operazioni non si è avuta che una parte della radice cercata. 4.º E' però certo che questo residuo è minore della quantità data di tutto intero il quadrato di $x + b$; si può adunque contare d'aver solamente fin qui sminuita la data quantità del quadrato d'una sola parte della radice che si cerca; dunque chia-

mando *parte prima* la parte trovata $x + b$, si potrà essa disegnare per l' a della formola, e per trovare l'altra parte b , si dovrà ricominciare dalla seconda operazione, cioè dal dividere il residuo $2ix + 2bi + i^2$ per $2a$, ossia per $2x + 2b$, e l' i , che si ha dalla divisione, farà una nuova parte radicale. Sottraendo, come prima, dal residuo medesimo la quantità $(2a + b)b$, cioè $(2x + 2b + i)i$, si ha zero per residuo, come nella formola, cioè è segno manifesto, che la radice cercata è $x + b + i$.

41. Se non si fosse avuto zero per residuo, si sarebbe ripetuta l'ultima delle precedenti quattro operazioni, fino a che, o si avesse zero per residuo, o l'ultimo residuo non fosse più divisibile per $2a$: Nel primo caso la quantità data sarebbe potenza perfetta, e la radice trovata sarebbe radice finita, o razionale; nel secondo la quantità data sarebbe potenza imperfetta, e la radice trovata sarebbe radice della massima potenza nascosta nella quantità data. Lo stesso è il metodo per l'estrazione delle radici più alte di grado n , ed è manifesto il modo d'applicare le formole alle intere quantità numeriche. Si separi, come è noto, il dato numero da destra a sinistra in classi di figure n per ciascuna; si operi su queste venendo da sinistra verso la destra, come su altrettanti termini d'una quantità complessa.

42. Per l'estrazione delle radici dalle frazioni, si rifletta, che il metodo universale per elevare ad una potenza qualunque una quantità data, applicato alle frazioni, si riduce ad alzare il numeratore, ed il denominatore della data frazione, alla potenza di grado dato; ciò fa conoscere, che ad estrarre una radice di grado dato da una frazione, basta l'estrarre la radice cercata da

sia ciascuno de' termini della data frazione. Così $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$

Cal-

43. **D** Alle cose dette al n. 39. sui segni da premetterli alle radici incomplete è manifesto, che si possono distinguere due generi di quantità radicali, cioè le quantità radicali reali, e le quantità radicali immaginarie; $\sqrt[4]{-}$ è una quantità radicale reale; $\sqrt{-}$ è immaginaria. Col metodo del n. 40. si può assegnare il valor vero di molte quantità radicali reali, come $\sqrt[4]{-} = 2$; ma d'un infinità d'altre quantità radicali reali, non si può conoscere, che la radice della potenza massima, che vi sta dentro come nascosta, e chiusa; non si sa la radice seconda di 5, ma la radice della massima potenza seconda, che sta in 5 e 2; le quantità radicali reali delle quali si assegna il valor vero si chiamano *incommensurabili* o *forde*. Grande è il profitto che se ne trae nell'analisi da queste quantità radicali, o reali, o immaginarie, sottomesse opportunamente alle leggi del calcolo; si disegnan' esse col segno \sqrt , scrivendo alla sinistra del medesimo, l'esponente della radice; $\sqrt[2]{a}$, o semplicemente \sqrt{a} , significa la radice seconda di a ; $\sqrt[3]{a}$ significa la radice terza di a ; $\sqrt[m]{a}$ significa la radice di grado m di a .

44. Racchiudo nelle seguenti formole tutte le regole del calcolo, pe' radicali reali.

$$\text{Addizione.} \quad \frac{p}{q} \sqrt[m]{\frac{a}{b}} + \frac{r}{s} \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{ps + qr}{qs} \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

$$\text{Sottrazione.} \quad \frac{p}{q} \sqrt[m]{\frac{a}{b}} - \frac{r}{s} \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{ps - qr}{qs} \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

$$\text{Moltiplicazione.} \quad \frac{p}{q} \sqrt[m]{\frac{a}{b}} \times \frac{r}{s} \sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{pr}{qs} \sqrt[m]{\frac{ac}{bd}}$$

D 2

Divisione. $\frac{p}{q} \sqrt[m]{\frac{a}{b}} : \frac{r}{s} \sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{p s}{q r} \sqrt[m]{\frac{a d}{b c}}$

Formaz.^e delle potenze. $\left(\frac{p}{q} \sqrt[m]{\frac{a}{b}}\right)^{\frac{s}{v}} = \sqrt[\frac{m v}{s}]{\frac{p^s a}{q^s b}}$

Estrazione delle radici. $\sqrt[\frac{s}{v}]{\frac{p}{q} \sqrt[m]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[\frac{m s}{v}]{\frac{p^m a}{q^m b}}$

45. Per la dimostrazione di queste formole, conviene supporre, che, in vece di $\sqrt[m]{a}$ si può scrivere $a^{\frac{1}{m}}$; ciò discende naturalmente dal n. 39. Chi cerca la radice m di a , considera a come una perfetta potenza m d'una incognita quantità; quindi per le regole dimostrate al n. 39. si dovrà dividere l'esponente di a per l'esponente della radice cercata, e si avrà $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$. Da questo principio si hanno le dimostrazioni delle formole precedenti; l'applico ad una sola. Si cerca la radice di grado $\frac{s}{v}$

della quantità $\frac{p}{q} \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q} \times \frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}}$; si avrà $\sqrt[\frac{s}{v}]{\frac{p}{q} \times \frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}}}$

$$= \frac{\frac{p^{\frac{v}{s}} a^{\frac{v}{m s}}}{q^{\frac{v}{s}} b^{\frac{v}{m s}}}}{\frac{m v}{q^{\frac{v}{s}} b^{\frac{v}{m s}}}} = \frac{m \frac{m s}{v} a^{\frac{1}{v}}}{q^{\frac{m v}{s}} b^{\frac{1}{v}}} = \sqrt[\frac{m s}{v}]{\frac{p^m a}{q^m b}}$$

46. Per le quantità radicali complesse, miste, o non miste di quantità commensurabili, o razionali come $a b \dots$ si osservino le stessissime leggi, che si sono date per le quantità intere; per non imbarazzarsi nel decorso del calcolo di tanti segni radicali, l'uno sull'altro ammicchiati, e stretti insieme, si sostituiscano nelle quan-

quantità date de' simboli interi, $a, b \dots ec.$, e nel prodotto si rimetta il loro primo valore.

47. Anche le quantità immaginarie incomplete, e complesse, miste, o no, di quantità reali soggiacciono alle stesse regole del calcolo delle reali quantità. Si offervi però che le quantità che stanno sotto il segno si possono sempre considerare come quantità positive, ma moltiplicate per -1 ; così $\sqrt{-a} = \sqrt{-1.a}$, e dalle formole del n. 44. $\sqrt{-1.a} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1}$. Prima dunque di fare le consuete operazioni del calcolo, o almeno quelle, che dipendono dalla moltiplicazione, e dalla divisione, si separino, come nell'esempio addotto, le quantità immaginarie, e si mantengano più che si può le $\sqrt{-1}$ anche ne' risultati, finchè non vengano cancellate, o tolte da un'altra $\sqrt{-1}$ introdotta nel calcolo da qualche moltiplicazione, e divisione.

Moltiplicazione. $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{-1.a} \times \sqrt{-1.b}$
 $= \sqrt{a} \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \sqrt{-1} = \sqrt{a} \sqrt{b} \times \sqrt{-1}$
 $= \sqrt{a b} \times -1 = -\sqrt{a b}$

Divisione. $\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{-1.a} : \sqrt{-1.b} = \sqrt{a} \sqrt{-1} : \sqrt{b} \sqrt{-1}$
 $= \frac{\sqrt{a} \sqrt{-1}}{\sqrt{b} \sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Per gli esponenti. $\sqrt[n]{-a^m} = \sqrt[n]{-1.a^m} = \sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{-1}$
 $= \sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{-1} = a^{\frac{m}{n}} \sqrt[n]{-1}$; si noti 1.^o che n indica un numero pari; 2.^o che a ragione si suppone $\sqrt{-1} \sqrt{-1} = -1$; dacchè nell'espressione di $\sqrt{-1}$ si consideri -1 come quadrato.

48. Si è sempre supposto nelle precedenti formole che le quantità radicali date per la somma, e sottrazione, abbiano quantità simili sotto i segni, e che gli esponenti de' segni radicali fossero in tutte le operazioni sempre gli stessi in ciascuna delle date quantità. Quando le quantità, che stanno sotto i segni non fossero simili, non si potrebbe fare altro che

in-

indicare col $+$ — la somma, o la sottrazione cercata; ma quando gli esponenti delle date quantità radicali fossero diversi, v'hanno acconcie regole per ridurli allo stesso esponente; queste appartengono alle riduzioni de' radicali, che noi per ultimo mettiam qui per ristretto, anche ad esercizio di calcolo.

Riduzioni nelle quantità radicali.

49. **R**idurre una quantità radicale alla sua più semplice forma.

$$\text{Formola. } \sqrt[m]{\frac{a^m c}{b^m d}} = \frac{a}{b} \sqrt[m]{\frac{c}{d}}.$$

Si cerchino tutti i divisori della quantità, che sta sotto il segno; si estraiga la radice m da quegli che sono potenze perfette di m ; si metta fuori del segno, a modo di coefficiente, il prodotto di queste radici, ed il prodotto degli altri divisori si lasci solo sotto il segno.

$$\text{Dim. } \sqrt[m]{\frac{a^m c}{b^m d}} = \frac{a^m c^{\frac{1}{m}}}{b^m d^{\frac{1}{m}}} = \frac{a}{b} \times \frac{c^{\frac{1}{m}}}{d^{\frac{1}{m}}} = \frac{a}{b} \sqrt[m]{\frac{c}{d}}.$$

50. Ridurre una quantità qualunque sotto qualunque segno radicale.

$$\text{Formola. } \frac{a}{b} = \sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}}.$$

Si alzi la quantità data alla potenza d'esponente eguale all'esponente del segno dato; si metta questa potenza sotto il dato esponente.

$$\text{Dim. } \frac{a}{b} = \frac{a^{\frac{m}{m}}}{b^{\frac{m}{m}}} = \sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}}.$$

51. Ridurre una quantità qualunque ad un prodotto d'un numero qualunque m di quantità radicali. For-

$$\text{Formola. } \frac{a}{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} \sqrt[m]{\frac{a}{b}} \sqrt[m]{\frac{a}{b}} \dots \text{ec. } m \text{ in numero.}$$

Si scriva la quantità data sotto il segno $\sqrt[m]{\quad}$; si congiunga insieme co' noti segni di moltiplicazione un numero m di queste quantità radicali.

Dim. Se $m = 4$; Sarà

$$\frac{a}{b} = \left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\right)^4 = \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{b}}.$$

52. Mettere fuori del segno qualunque quantità algebrica x di qualunque termine, per esempio del primo, d'una data quantità radicale complessa.

$$\text{Formola. } g x \sqrt[m]{a x + b x^r} = g x^{1 + \frac{r}{m}} \sqrt[m]{a + b x^{r-m}}.$$

Si cerchi la radice m della quantità x ; per questa radice si divida la quantità complessa, che sta sotto il segno, e si moltiplichi il coefficiente del segno radicale.

$$\text{Dim. } \sqrt[m]{x^m} = x; \text{ dunque } g x \sqrt[m]{a x + b x^r} = g x \cdot x^{\frac{r}{m}} \sqrt[m]{\frac{a x + b x^r}{x^{\frac{r}{m}}}}$$

$$= g x^{1 + \frac{r}{m}} \sqrt[m]{a + b x^{r-m}}.$$

53. Mettere al numeratore d'una quantità, che sta fuori del segno, qualunque quantità data.

$$\text{Formola. } \frac{a}{b} \sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot g \sqrt[m]{\frac{c}{d g^m}}.$$

Si moltiplichi per la data quantità il coefficiente del dato radicale; si alzi la medesima quantità data alla potenza d'esponente eguale all'esponente del radicale dato, e per questa potenza si divida la quantità, che sta sotto il segno.

Dim.

$$\text{Dim. } \frac{a}{b} \sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot g \cdot \sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a g}{b} \sqrt[m]{\frac{c}{d g^m}}.$$

54. Mettere al denominatore della quantità, che sta fuori del segno, qualunque quantità data.

$$\text{Formola. } \frac{a}{b} \sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b g} \sqrt[m]{\frac{c g^m}{d}}.$$

Si divida il coefficiente del dato radicale per la quantità data; si alzi la medesima quantità data alla potenza d'esponente eguale all'esponente del radicale dato, e per questa potenza si moltiplichi la quantità, che sta sotto il segno del dato radicale.

$$\begin{aligned} \text{Dim. } \frac{a}{b} \sqrt[m]{\frac{c}{d}} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{g} \cdot g \sqrt[m]{\frac{c}{d}} \\ &= \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{g} \sqrt[m]{\frac{c}{d}} \sqrt[m]{g^m} = \frac{a}{b g} \sqrt[m]{\frac{c g^m}{d}}. \end{aligned}$$

55. Ridurre una data quantità radicale ad un segno d'esponente n maggiore, o minore dell'esponente dato m .

$$\text{Formola. } \frac{a}{b} \sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \sqrt[n]{\frac{c^{\frac{n}{m}}}{d^{\frac{n}{m}}}}.$$

Si divida l'esponente del segno cercato per l'esponente del segno dato; si alzi la quantità, che sta sotto il dato segno alla potenza d'esponente eguale al quoto di questa divisione. Si metta questa potenza sotto il segno cercato preceduto dal coefficiente del segno dato.

$$\text{Dim. } \frac{a}{b} \sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{d^{\frac{1}{m}}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c^{\frac{n}{m n}}}{d^{\frac{1}{m n}}} = \frac{a}{b} \sqrt[n]{\frac{c^{\frac{n}{m}}}{d^{\frac{n}{m}}}}.$$

56. Ri-

56. Ridurre ad una quantità intera la quantità rotta, che per avventura si trovi sotto il segno d'una data quantità radicale.

$$\text{Formola. } \frac{a}{b} \sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b d} \sqrt[m]{c d^{m-1}}.$$

Si divida il coefficiente del dato radicale per il denominatore della frazione, che sta sotto il segno; si alzi il denominatore medesimo alla potenza d'esponente eguale all'esponente del dato segno; per questa potenza si moltiplichi la frazione, che sta sotto il segno.

$$\begin{aligned} \text{Dim. } \frac{a}{b} \sqrt[m]{\frac{c}{d}} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d^m} = \frac{a}{b d} \cdot \frac{c d^{m-1}}{d^{m-1}} = \frac{a}{b d} \sqrt[m]{\frac{c d^{m-1}}{d^{m-1}}} \\ &= \frac{a}{b d} \sqrt[m]{c d^{m-1}}. \end{aligned}$$

57. Ridurre qualunque numero di quantità radicali al medesimo segno.

$$\text{Formola. } \frac{p}{q} \sqrt[m]{\frac{a}{b}} \quad \left. \begin{aligned} &A. \\ &\frac{r}{s} \sqrt[n]{\frac{c}{d}} \end{aligned} \right\} = \frac{p}{q} \sqrt[m n]{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{r}{s} \sqrt[m n]{\frac{c^m}{d^m}}.$$

Si moltiplichi l'esponente di ciascun segno radicale A per il prodotto degli esponenti degli altri segni; e si alzi la quantità, che sta sotto il segno A , alla potenza d'esponente eguale a questo stesso prodotto.

$$\text{Dim. } \frac{p}{q} \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{a^{\frac{n}{m n}}}{b^{\frac{1}{m n}}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{a^{\frac{n}{m n}}}{b^{\frac{1}{m n}}} = \frac{p}{q} \sqrt[m n]{\frac{a^n}{b^n}}, \text{ e per la}$$

E

stessa

stessa ragione $\sqrt[r]{\frac{c}{d}} = \sqrt[r]{\frac{c^m}{d^m}}$.

58. Per la trasformazione del num. 49. è necessario sapere trovare tutti i divisori d'una data quantità. Egli è facile il trovare i divisori incomplessi, semplici, e composti d'una data quantità: Si divida la data quantità per la più piccola, o più semplice quantità, della quale si veda composto la data quantità X ; Si divida il quoto X' per la medesima quantità.... fino a che qualcuno de' quoti X'' non possa più dividersi per l'assunto divisore. Si divida X'' per la più semplice delle quantità componenti, e si ripeta la medesima operazione su i nuovi quoti X''' , fino a trovarne uno non divisibile esattamente, che per se stesso. Si scrivano per ordine uno sotto l'altro i quoti X' , X'' , X''' in una colonna A ; in una seconda colonna B , vicina alla prima, si scrivano i prodotti de' divisori presi a due a due; in una terza colonna C si scrivano i prodotti de' divisori presi a tre a tre....., B conterrà i divisori semplici; C , D conterrà i divisori composti. Talvolta con questo metodo si troveranno anche i divisori complessi; Ma il trovarli tutti esattamente, e per ordine, non è opera di leggiera fatica, e di piccole riflessioni; questo problema lo riservo ad un trattato particolare.

CAPO

CAPO TERZO.

Uso del Calcolo Algebraico nella soluzione delle equazioni.



Formazione delle equazioni.

59. SI chiama *Algebra*, o *Analisi* l'arte di sciogliere col calcolo algebraico, i problemi, che si propongono intorno a qualsivoglia specie di quantità; e la prima operazione dell'Analisi industriale, è di denominare colle lettere dell'Alfabeto le quantità date, e le cercate, e di esprimere con carattere algebraico le relazioni, che tra queste passano, non altrimenti che i concetti della mente nostra siamo usi ad esprimere con parole; proprie a quell'idioma, che a noi è comune, e familiare. Ciascuna condizione del problema dà un'equazione, e se tante sono le condizioni, ossia se tante in numero sono le equazioni, quante sono le quantità cercate, il problema si chiama *determinato*; se sono meno, o più in numero l'equazioni che le quantità cercate, il problema si chiama *indeterminato* o *più che determinato*; per ciascuno di questi casi, ci sono opportune regole, o per determinare esattamente il valore delle quantità incognite contenute nelle equazioni, o per determinarlo prossimamente al vero. Non è mia intenzione di stendere partitamente tutti i precetti dell'arte Analitica; Solamente esporrò alcuni metodi più facili per trovare il valore dell'incognita, per cui sia ordinata una data equazione, supponendo conosciute tutte le altre quantità, che ne compongono i termini.

60. E in prima conviene sapere quale sia l'indole, e la natura delle radici d'una data equazione; volgiamoci per ciò al problema inverso di cercare quale sia la natura d'un'equazione, che ha per radici (o per valore dell'incognita) diverse date quantità. Sia x l'incognita, e siano a, b, c, d, \dots i di-

versi valori di x ; cosicchè sia $x = a$, $x = b$, $x = c$, ec.
 1.º Si avrà $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$... ec.; questa è la fondamentale operazione dell'Analisi, chiamata *trasposizione*. Si conserva l'equazione tra i due membri (ciascuna delle quantità tra se eguali si chiama membro dell'equazione) d'una data equazione, se si tolga da un membro dell'equazione qualunque termine, e si metta nell'altro membro col segno contrario, scrivendo un zero al luogo del primo; ciò non è altro, che aggiungere, o sottrarre da amendue i membri d'un'equazione una stessa quantità; se $x = a$, sottraendo da amendue i membri la quantità a , si ha $x - a = a - a$, cioè $x - a = 0$. 2.º Ciascuna di quelle equazioni $x - a = 0$, $x - b = 0$, si chiama equazione di primo grado; dacchè l' x non si trova in grado più elevato del primo; il prodotto di due di quelle equazioni ($x - a = 0$) ($x - b = 0$) si chiama equazione di secondo grado, dacchè, fatta la moltiplicazione, l' x si trova alzata al secondo grado, cioè alla seconda potenza; ed in generale, il grado dell'equazione è sempre eguale all'esponente massimo dell'incognita. Si noti che aggiungere un'equazione ad un'altra, sottrarre un'equazione da un'altra, moltiplicare, dividere un'equazione per un'altra significa aggiungere ciascun membro d'un'equazione al membro corrispondente dell'altra ... ec. 3.º Quindi ciascuna equazione si può concepire come composta di tante equazioni di primo grado, quante sono le unità nell'esponente del suo grado. Le equazioni però di grado più elevato si possono concepire formate dalla moltiplicazione d'altre equazioni di grado inferiore, e più elevato del primo; quelle di quarto grado possono essere formate da due del secondo, quelle del sesto da tre del secondo, o da due del terzo ... ec. 4.º Data una delle componenti, si può abbassare di grado la composta, dividendo questa per la sua componente, e se il grado della composta è m , ed il grado della componente è n , il grado della ridotta sarà $m - n$.

61. Fat-

61. Fatte le moltiplicazioni accennate delle equazioni di primo grado, si ha grado

I. $x - a = 0$

II. $x^2 - ax + ab = 0$
 $- bx$

III. $x^3 - ax^2 + abx - abc = 0$
 $- bx^2 + acx$
 $- cx^2 + bcx$

IV. $x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = 0$
 $- bx^3 + acx^2 - abdx$
 $- cx^3 + bcx^2 - acdx$
 $- dx^3 + adx^2 - bcdx$
 $+ bdx^2$
 $+ cdx^2$

V. ec.

Numero, e qualità delle radici reali.

62. **D**ALL'attenta considerazione di queste, e d'altre simili formule fatte colle radici negative, o miste, si vede manifestamente. 1.º Che qualunque equazione ha tante radici nè più nè meno, quante sono le unità dell'esponente del suo grado. 2.º Che il coefficiente del secondo termine, o a dire meglio, della incognita che lo distingue, contiene la somma di tutte le radici; il coefficiente del terzo termine contiene tutti i prodotti delle radici prese a due a due; il coefficiente del terzo termine contiene tutti i prodotti delle radici a tre a tre....., e l'ultimo termine contiene il prodotto di tutte le radici prese insieme. 3.º Ne' termini pari, le radici stanno moltiplicate in numero impari; ne' termini impari, stanno moltiplicate in numero pari. 4.º Se tutte le radici sono negative, i termini dell'equazione sono tutti positivi; se tutte le radici sono positive, i ter-

termini dell'equazione sono alternativamente positivi, e negativi; se sono miste di radici positive, e negative, non è mai continuata l'alternazione de' segni, e talvolta manca qualche termine; di più tante sono le radici positive, quante sono le alternazioni de' segni $+$ $-$; e tante sono le radici negative, quante sono le consecuzioni dello stesso segno ne' termini dell'equazione. 5.º Se la somma delle radici positive è eguale alla somma delle negative, manca il secondo termine dell'equazione, o si fa eguale a zero; se la somma delle radici positive supera la somma delle negative, il secondo termine dell'equazione è negativo; se la somma delle positive è minore delle negative, il secondo termine è positivo. 6.º Se il numero delle radici positive è pari, l'ultimo termine dell'equazione è positivo, se impari è negativo. 7.º Se si cambino i segni de' termini solamente pari, o solamente impari d'un'equazione tutte le radici si cambiano di positive in negative, e di negative in positive. 8.º Se invece d' x , e delle sue potenze si sostituisca in un'equazione il valore dell'incognita, la somma de' termini dell'equazione farà eguale a zero. Queste proprietà delle radici si possono quasi tutte dimostrare *a priori* dalle regole de' segni $+$ $-$; basti per noi l'induzione. Si noti, che le proposizioni inverse delle otto precedenti sono vere in ogni caso.

Numero, e qualità delle radici immaginarie.

63. **D** Al calcolo delle quantità immaginarie è manifesto, che il loro prodotto, solamente allora è reale, quando sono pari in numero le immaginarie quantità in sicme moltiplicate; si vede di più che per togliere da un polinomio $x - a - \sqrt{-b}$ il segno radicale, non v'è altro mezzo, che moltiplicare il dato polinomio per un altro, che non differisca dal primo, che nel segno prefisso al termine immaginario, cioè per $x - a + \sqrt{-b}$.

64. For-

64. Formando su questi due principj l'equazioni composte da altre equazioni immaginarie di primo grado si vedrà:

1.º Che se v'hanno radici immaginarie in un'equazione, esse sono sempre pari in numero. 2.º Che sotto il segno radicale di ciascun binario di radici immaginarie vi sta sempre la medesima quantità, soltanto diversa nel $+$, o $-$ che precede il segno $\sqrt{\quad}$. 3.º Che qualunque equazione di grado impari, ha almeno una radice reale. 4.º Che nelle equazioni di grado pari, v'ha sempre una radice reale, quando l'ultimo termine, cioè il termine costante è negativo. 5.º Nelle equazioni di terzo e quarto grado, se manca il secondo termine, ed il terzo sia positivo, v'hanno sempre delle radici immaginarie.

65. Il problema più difficile intorno alle radici immaginarie delle equazioni, è di sapere il loro numero prima d'applicarvi i metodi per scioglierle. Newton ha esposto per ciò un metodo assai elegante nella sua Aritmetica universale; lo ha dimostrato il Sig. Giorgio Campbell, e nel dimostrarlo ci ha fatti avveduti che era difettoso in molti casi.

Espongo qui il metodo, che a quello del Newton v'ha sostituito del suo il citato Autore. Sia m il grado dell'equazione; dalla tavola delle potenze di $a + b$ si prendano i coefficienti A della potenza m , ommessi gli estremi; si sminuisca ciascun coefficiente di un unità, si avrà A' ; si divida ciascun termine di A' per il doppio termine corrispondente di A ; e le frazioni B , o B' quindi nate, si scrivano per ordine sopra i termini della data equazione, ommessi gli estremi. Sia n qualunque termine della data equazione; n' la frazione sovrapposta; a, b, c, \dots ec. i termini, che vengono verso la destra del termine n ; a, b, c, d, \dots i termini che gli vengono verso la sinistra. Ciò posto: Se $n \cdot n'$ farà maggiore di $a' a - b' b + c' c - d' d + e' e - f' f \dots$ ec. $= C$, si scriva il segno $+$ sotto n ; se $n \cdot n'$ farà minore di C , si scriva il segno $-$ sotto n ; e sotto il primo e l'ultimo termine dell'equazione

zione si metta il segno +: Saranno tante le radici immaginarie nella data equazione, quante si troveranno alternazioni di + in — ne' segni sottoposti. Fin qui l'Autore; io non ho fatto altro che mettere il teorema sotto forma più comoda, e più piana, introducendo le denominazioni di n, n', \dots . Applico il metodo ad un esempio. Sia l'equazione $x^7 - 5x^6 + 15x^5 - 23x^4 + 18x^3 + 10x^2 - 28x + 24 = 0$ di grado settimo. Siano A i coefficienti della settima potenza di $a + b$, ommessi gli estremi; sottraendo l'unità da ciascun termine di A , si avrà A' ; dividendo ciascun termine di A' per il doppio de' termini corrispondenti di A , si avrà B , cioè B'

$$A \dots 7. 21. 35. 35. 21. 7. B \dots \frac{6}{14} \cdot \frac{20}{42} \cdot \frac{34}{70} \cdot \frac{34}{70} \cdot \frac{20}{42} \cdot \frac{6}{14};$$

$$A' \dots 6. 20. 34. 34. 20. 6. B' \dots \frac{3}{7} \cdot \frac{10}{21} \cdot \frac{17}{35} \cdot \frac{17}{35} \cdot \frac{10}{21} \cdot \frac{3}{7};$$

Si dispongono queste frazioni sopra i termini della data equazione, ommessi gli estremi, si avrà

$$\begin{array}{cccccccc} & \frac{3}{7} & \frac{10}{21} & \frac{17}{35} & \frac{17}{35} & \frac{10}{21} & \frac{3}{7} & \\ & + & - & + & - & + & - & + \\ x^7 & - & 5x^6 & + & 15x^5 & - & 23x^4 & + & 18x^3 & + & 10x^2 & - & 28x & + & 24 = 0 \end{array}$$

per il termine $5x^6$ si ha $n'n^2 = \frac{75}{7} x^{12}$, e $C = 15x^{12}$

per il termine $15x^5$ si ha $n'n^2 = \frac{750}{7} x^{10}$, e $C = 97x^{10}$

per il termine $23x^4$ si ha $n'n^2 = \frac{8993}{35} x^8$, e $C = 292x^8$

per il termine $18x^3$ si ha $n'n^2 = \frac{5508}{35} x^6$, e $C = 70x^6$

per il termine $10x^2$ si ha $n'n^2 = \frac{1000}{21} x^4$, e $C = 48x^4$

per il termine $28x$ si ha $n'n^2 = \frac{336}{1} x^2$, e $C = 24x^2$

e mettendo sotto ciascun termine dell'equazione i segni opportuni, si hanno sei mutazioni, o variazioni de' Segni, cioè l'equa-

zione data contiene sei radici immaginarie. Colla regola del Newton non se ne troverebbero che due.

Trasformazioni delle equazioni.

66. **L'**Artificio più universale, e più spedito per trovare le radici d'una data equazione è di trasformare l'equazione data in un'altra più semplice, per passare quindi dalle radici della trasformata alle radici della proposta. L'uso del calcolo, e la pronta penetrazione dell'Analista suggerisce nelle particolari circostanze la più acconcia legge, con cui si deve trasformare la proposta equazione; qualunque però sia la legge della trasformazione. 1.º Si prenda ad arbitrio un'incognita y diversa dall'incognita x , per cui è ordinata l'equazione proposta; quest' y rappresenterà qualunque radice della trasformata. 2.º Si esprima con un'equazione tra x ed y la legge della cercata trasformazione. 3.º Si ricavi da questa equazione *ausiliare* il valore di x , da sostituirsi nella data equazione. Comunemente parlando, non fa bisogno per trovare l' x dell'equazione ausiliare, che delle più volgari operazioni del calcolo, e de' semplicissimi teoremi, che da queste si deducono; a cagione d'esempio, che un quoto moltiplicato pel divisore è eguale al dividendo; che un prodotto diviso per uno de' suoi fattori è eguale al prodotto degli altri fattori.... ec.

67. Esempi di trasformazioni. 1.º Aumentare le radici x della proposta, d'una data quantità m ; si ha $x + m = y$, cioè $x = y - m$ da sostituirsi nella proposta. 2.º Sminuire le radici x d'una data quantità m ; farà $x - m = y$, cioè $x = y + m$. 3.º Sottrarre ciascuna radice x dalla quantità m ; farà $m - x = y$, cioè $x = m - y$. 4.º Moltiplicare le radici x colla quantità m ; farà $m x = y$, cioè $x = \frac{y}{m}$. 5.º Dividere le radici x per la quantità m ;

F

farà

farà $\frac{x}{m} = y$, cioè $x = m y$. 6.º Dividere una quantità m per ciascuna radice x ; farà $\frac{m}{x} = y$, cioè $x = \frac{m}{y}$.

Se le radici della trasformata vogliansi eguali

$$a \sqrt[m]{x}, \text{ farà } x = y^m$$

$$a \sqrt[m]{f x}, \text{ farà } x = \frac{y^m}{f}$$

$$\text{ad } \frac{f^m}{x}, \text{ farà } x = \frac{f^m}{y}$$

$$\text{ad } \frac{x f^m}{g^n}, \text{ farà } x = \frac{g^n y}{f^m}$$

.... ec.

È evidente, che sostituendo le radici della trasformata in queste equazioni ausiliarie, si avranno le radici x della proposta; e facendo varj esempj di trasformazioni, si vedrà. 1.º Che per moltiplicare le radici x con m , basta sostituire y invece d' x nella data equazione, e moltiplicare il secondo termine della nuova equazione per m , il terzo per m^2 , il quarto per m^3 , l' n^{esimo} per m^{n-1} . 2.º Che per dividere le radici x per m , basta sostituire y invece d' x nella proposta, e dividere il secondo termine della nuova equazione per m , il terzo per m^2 , il quarto per m^3 , l' n^{esimo} per m^{n-1} . 3.º Che, se l'equazione proposta ha alcune radici immaginarie, qualunque trasformata conterrà le immaginarie medesime. 4.º Se la proposta ha delle radici positive e negative, e si aumentino le radici d'una quantità m , le radici positive si aumenteranno, e si sminuiranno le negative nella trasformata. 5.º Se la proposta ha delle radici positive e negative, e la quantità m , di cui si aumentino le radici della proposta sia eguale ad una delle radici negative, questa sarà eguale a zero nella trasformata; la trasformata inoltre avrà l'ultimo termine eguale

eguale a zero, e si potrà abbassare d'un grado, dividendola per y . 6.º Nella stessa supposizione, se m sarà maggiore di qualunque delle radici negative della proposta, le radici negative della proposta così accresciute, faranno le positive della trasformata, e la minima radice positiva della trasformata nascerà dalla massima negativa della proposta. 7.º Se la proposta ha delle radici positive, e negative, e la quantità m , di cui si vogliono scemate le radici della proposta, sia eguale ad una, o maggiore di ciascuna radice positiva della proposta, o mancherà l'ultimo termine nella trasformata, o le positive della proposta sminuite di m saranno le radici negative della trasformata. È facile il vedere le proposizioni inverse delle precedenti, la loro dimostrazione dalle regole de' segni, e dal num. 62., ed i corollari, che si possono dedurre da ciascuna.

Uso delle trasformazioni.

68. **T**rovare il valore della quantità m , che aggiunta alle radici della proposta, faccia svanire un dato termine nella trasformata.

Se il secondo termine della proposta ha $+$ si aumenti, e se ha $-$ si sminuisca ciascuna radice della proposta, della quantità m supposta nota; si faccia eguale a zero il coefficiente del termine della trasformata, che corrisponde al termine, che si vuol togliere; il valore di m dedotto da questa equazione sarà la quantità cercata. Sia la proposta $A \dots x^3 - 2 x^2 + v x - t^2 = 0$. Si supponga

$$x - m = y, \text{ cioè } x = y + m; \text{ Sarà } z = y + m$$

$$z^2 = y^2 + 2 m y + m^2$$

$$z^3 = y^3 + 3 m y^2 + 3 m^2 y + m^3$$

d'onde nella proposta sarà $z^3 = y^3 + 3 m y^2 + 3 m^2 y + m^3$

F 2.

$$\begin{array}{rcl}
 -2sz & = & -2sy - 4msy - 2sm^2 \\
 +vz & = & +vy + mv \\
 +s^2z & = & +s^2y + ms^2 \\
 -t^2 & = & -t^2
 \end{array}$$

cioè invece di A si avrà $B \dots y^3 + 3my^2 + 3m^2y + m^3 = 0$

$$\begin{array}{rcl}
 -2sy^2 - 4msy - 2m^2s \\
 +vy + mv \\
 +s^2y + ms^2 \\
 -t^2
 \end{array}$$

Se si voglia, che nella trasformata di A manchi il secondo termine, si supponga il coefficiente di y^2 , in B , eguale a zero, cioè $3m - 2s = 0$, ed $m = \frac{2s}{3}$ farà la quantità da sostituirsi in B per avere la cercata trasformata. Se si voglia, che nella trasformata di A manchi il terzo termine, si supponga il coefficiente di y in B eguale a zero; e se si voglia togliere il quarto termine, si supponga il coefficiente di y^0 , cioè l'ultimo termine di B , eguale a zero. Si vede in generale, che per fare svanire nella trasformata il termine che corrisponde all' n^{esimo} della proposta, conviene sciogliere un'equazione di grado $(n-1)^{\text{esimo}}$.

69. Trovare una quantità m , che aggiunta alle radici della proposta, faccia eguale ad a il coefficiente d'un dato termine n^{esimo} della trasformata.

Si operi come nel problema precedente; ma il coefficiente del termine n^{esimo} in B si dovrà supporre eguale ad a , e non a zero.

70. Mettere nella trasformata i termini, che mancano nella proposta.

Si aumentino, o si sminuiscano, come al num. 68. d'una qualunque quantità a le radici della proposta.

71. Mettere nella trasformata i termini, che mancano nella proposta, ed elevare la trasformata ad un grado qualunque più elevato del grado della proposta.

Si moltiplichi la proposta per x tante volte, finchè la trasformata sia di grado cercato; si operi sull'equazione così ridotta come al num. 70.

72. Se il primo termine della proposta ha un coefficiente a diverso dall'unità, trasformarla in un'altra, il cui primo termine abbia l'unità per coefficiente.

Si moltiplichino le radici della proposta per a ; oppure si divida ciascun termine della proposta per a .

73. Se il primo termine della proposta ha per coefficiente l'unità, ed i coefficienti d'uno, o più altri termini sieno frazionari, trasformarla in un'altra, che non abbia frazioni per coefficienti degli altri termini, e mantenga l'unità per coefficiente del primo termine.

Si moltiplichino le radici della proposta per il prodotto de' denominatori di tutti i termini.

74. Trasformare la proposta in un'altra, in modo, che la radice massima della proposta sia la minima della trasformata, e la minima della proposta sia la massima della trasformata.

Si supponga $x = \frac{1}{y}$, e fatte come sopra le sostituzioni, si moltiplichi ciascun termine della trasformata per il prodotto de' denominatori della medesima.

75. Se le radici della proposta siano parte positive, parte negative, trasformarla in un'altra, le di cui radici siano tutte positive. Si muti il segno al massimo coefficiente negativo della proposta; da questo, aumentato d'un'unità, si sottraggano le radici della proposta. Sia $x^2 - 2x - 3 = 0$; il massimo coefficiente negativo è -3 ; mutando il segno a questo coefficiente si ha 3 ; si faccia $3 + 1 - x = y$, cioè $4 - x = y$, ossia $4 - y = x$; d'onde $x^2 = 16 - 8y + y^2$, e la proposta si cambierà in $y^2 - 8y + 16 = 0$, cioè in $y^2 - 6y + 5 = 0$, che per l'alternazione

$$\begin{array}{r}
 +2y - 8 \\
 -3
 \end{array}$$

de' segni, ha tutte le sue radici positive.

76. Togliere gli incommensurabili coefficienti \sqrt{n} , che per avventura si trovino ne' termini pari della proposta.

Si moltiplichino le radici della proposta per \sqrt{n} . 77. Se

77. Se si trovi nel coefficiente del secondo termine della proposta $\sqrt[3]{n^2}$, nel coefficiente del terzo termine $\sqrt[3]{n}$, nessun incommensurabile al quarto termine, $\sqrt[3]{n^2}$ al quinto,

$\sqrt[3]{n}$ al sesto, nessuno al settimo, e così successivamente, basta supporre $x = \frac{y}{\sqrt[3]{n}}$, e svaniranno i radicali di terzo grado da

qualsunque data equazione. Se non vi fosse quest'ordine ne' radicali coefficienti d'un'equazione, è manifesto che colla presente trasformazione, che è la quarta del num. 67. non svanirebbero i radicali. Lo stesso metodo può servire in casi simili per le $\sqrt[n]{m}$, e per le $\sqrt[m]{n}$.

78. E' troppo importante il sapere togliere i coefficienti radicali da una proposta equazione per non dovere qui omettere un metodo generale per le radicali d'ogni grado, comunque disposte ne' termini dell'equazione medesima. 1.º Si lasci sola in un membro dell'equazione la quantità radicale, che si vuol togliere dall'equazione; ciò si fa col trasportare nell'altro membro tutte le altre quantità: Si alzi ciascun membro dell'equazione alla potenza d'esponente eguale all'esponente del radicale medesimo. 2.º Se dopo questa operazione si trovi nel secondo membro qualch'altra quantità radicale, si operi su questa come sulla prima, e così nel resto. Si abbrevierà il calcolo (come al num. 46.) col sostituire prima di tutto, o dopo ciascuna operazione una nuova lettera invece delle quantità già divenute commensurabili, riservandosi a rimettere nell'equazione il valore, o i valori di queste lettere introdotte, dopo finite tutte le operazioni sulle quantità radicali.

Sia

$$\text{Sia } x + \sqrt[3]{a^2x} = \sqrt{ax}; \text{ si faccia } n = \sqrt[3]{a^2x} \\ m = \sqrt{ax}$$

ed invece dell'equazione data si avrà $x + n = m$; d'onde $n = m - x$, ed elevando alla terza potenza ciascun membro si avrà $n^3 = m^3 - 3m^2x + 3mx^2 - x^3$, ossia $n^3 + 3m^2x + x^3 = m^3 + 3mx^2$; in quest'ultima equazione si suppongano le quantità commensurabili $n^3 + 3m^2x + x^3$ eguali ad f^3 , e si alzi, a cagione dell' $m = \sqrt{ax}$, ciascun membro dell'equazione $m^3 + 3mx^2 = f^3$ alla seconda potenza; si avrà $m^6 + 6m^4x^2 + 9m^2x^4 = f^6$, che non conterrà più incommensurabile alcuna, dopo la sostituzione de' valori di f, m, x .

79. Questi ed altri simili sono gli usi delle trasformazioni delle equazioni, tutti necessari per disporre l'equazione, che si ha da un problema a farci conoscere i valori dell'incognita, per cui è ordinata. La più usuale tralle addotte trasformazioni è quella del num. 68. applicata a togliere il secondo termine d'una data equazione; la trasformazione del num. 78. serve per conoscere il grado vero d'una data equazione.

Analisi delle equazioni di primo grado.

80. **D**Alle cose fin qui dette è manifesto, che per non turbare l'eguaglianza che passa tra i due membri d'un'equazione si devono fare in un membro le operazioni stesse, che si fanno nell'altro; come sarebbe aggiungere ad amendue i membri, o sottrarre da' medesimi una stessa quantità, o quantità eguali; moltiplicare, o dividere ciascun membro per una stessa quantità, o per quantità eguali; formare la stessa potenza, o estrarre la stessa radice da un membro, che si forma, o si estraе dall'altro; finalmente sostituire in un'equa-

equazione invece d'un termine, o d'una lettera un altro termine, od un'altra lettera eguale alle prime. Finchè si opererà full'equazione in questo modo, faranno sempre legittime le conseguenze che se ne dedurranno; or questi, e non altri sono gli artificj dell'Analisi; Incominciamo dalle equazioni di primo grado.

81. Se l'equazione non contiene più d'una incognita x ; si traspongano in un solo membro dell'equazione tutti i termini che contengono l' x , lasciando gli altri nell'altro membro; si facciano su amendue i membri dell'equazione le operazioni a quelle contrarie, per cui resta l' x involupato con altre quantità; cioè se è diviso per a , si moltiplichi tutta l'equazione per a ; se è moltiplicato per a , si divida per a tutta l'equazione... ec.; fino a tantochè resti l' x da se solo in un membro, e le quantità cognite nell'altro membro dell'equazione. Si cerchi il valore di

$$ax + bc = \frac{dx}{c} + ca; \text{ si avrà, trasponendo } \frac{dx}{c}, cbc,$$

$$ax - \frac{dx}{c} = ca - bc; \text{ moltiplicando tutto per } c, \text{ si ha } cax$$

$$- dx = c^2 a - bc^2; \text{ o sia}$$

$$(ca - d)x = c^2 a - bc^2, \text{ e dividendo per } ca - d \text{ si ha finalmente } x = \frac{c^2 a - bc^2}{ca - d}.$$

Con queste, ed altre simili operazioni si libera l'incognita d'un'equazione data; cioè si esprime con quantità conosciute l'incognita della data equazione.

82. Se l'equazione contiene più d'un'incognita, per avere determinatamente il valore di ciascuna incognita, si suppongono date tante equazioni, quante sono le incognite, ed a queste si applicano le sovra esposte riduzioni per le equazioni ad una sola incognita co' tre seguenti metodi.

Primo metodo. Siano, a cagione d'esempio, due le equazioni del

del problema a due incognite; $ax + by = a^2$; $\frac{ay}{c} = b - \frac{fx}{a}$;

1.º Si maneggi una di queste equazioni, come non contenesse più d'una incognita; dalla prima equazione, si avrà $x = \frac{a^2 - by}{a}$;

2.º Si sostituisca questo valore di x nella seconda equazione; si avrà $\frac{ay}{c} = b - \frac{f(a^2 - by)}{a}$;

3.º Sostituendo il valore di y , preso in questa equazione, nel valore di x trovato prima, si ha $x = a - \frac{b^2 ca - bcf a}{a^2 - bcf} = \frac{a^4 - ab^2}{a^2 - bcf} c$.

Secondo metodo. Quando in ciascuna delle date equazioni si trovano le stesse incognite; si prenda in ciascuna il valore d'una stessa incognita; si faccia eguale il valore primo dell'incognita al secondo al terzo... ec.; si avrà un'equazione, ed una incognita meno delle prime; su queste si operi allo stesso modo, e si ripeta la stessa operazione, fino ad avere una sola equazione, con una sola incognita; il valore di questa, sostituito nella penultima, darà il valore d'un'altra incognita; il valore di queste due, sostituito nelle altre, ci darà... ec. Nel proposto

esempio. 1.º Si ha dalla prima equazione $x = \frac{a^2 - by}{a}$, e dalla seconda equazione si ha $x = \frac{abc - a^2 y}{cf}$;

2.º Facendo un'equazione di questi due valori d' x si ha $\frac{a^2 - by}{a} = \frac{abc - a^2 y}{cf}$;

donde cavando il valore di y , e sostituendolo in uno de' valori di x , si avrà x .

Terzo metodo. Se le due equazioni a due incognite sieno tali, che i termini, che contengono la stessa incognita, presi senza segni, sieno identici, ed i termini, che contengono un'incognita abbiano lo stesso segno, mentre quegli, che contengono l'altra incognita hanno segni contrarij in amendue equazioni; la somma delle date equazioni darà il valore d'un'incognita, e la differenza

delle medesime darà il valore dell'altra. Se nelle date equazioni vi sia bensì la detta contrarietà de' segni, ma l'identità manchi de' termini, si ridurranno essi all'identità uno per uno, moltiplicando ciascuna equazione per il coefficiente dell'incognita dell'altra equazione. Se i termini della stessa incognita abbiano in amendue le equazioni gli stessi segni, o segni contrarj, si riducono, se fa bisogno, questi termini medesimi all'identità, ed in vece della somma, e sottrazione, si faccia una doppia sottrazione nel caso de' segni stessi, ed una doppia addizione nel caso de' segni contrarj. Questo metodo si stende, come gli altri due, a tre, a quattro . . . equazioni formate da tre, da quattro . . . incognite.

Esempj. 1.º caso. $ax + by = c^2$, $ax - by = n^2$; fatta la somma

di queste, si ha $2ax = c^2 + n^2$ cioè $x = \frac{c^2 + n^2}{2a}$; e sottraen-

do una dall'altra, si ha $2by = c^2 - n^2$, cioè $y = \frac{c^2 - n^2}{2b}$

2.º caso. $ax + by = c^2$, $nx - my = n^2$; moltiplicando la prima equazione per m , e la seconda per b si ha $amx + bmy = mc^2$, $bnx - bmy = bn^2$; la somma di queste equazioni darà il valore di x ; e moltiplicando la prima delle date equazioni per n , e la seconda per a , la differenza delle equazioni, che ne risulteranno, darà il valore di y ; cioè per avere il valore d'un'incognita, si rendono identici i termini, che contengono l'altra.

3.º caso. $ax + by = c^2$, $nx + my = n^2$; rendendo identico l' x , la differenza delle due equazioni darà l' y ; e rendendo identico l' y , la differenza delle equazioni darà l' x ; e se fossero date

$-ax + by = c^2$, $+nx - my = n^2$; si faccia la somma delle equazioni, resti che siano identici i termini dell' x , o y , e si avrà y , o x .

83. Se il numero delle incognite fosse maggiore del numero delle equazioni, non si potrà determinare il loro valore, senza assumere ad arbitrio il valore di alcune incognite. Dato

$3x + 2y = 4$, si avrà $x = \frac{4 - 2y}{3}$, e questo valore di x dipenderà

dal valore arbitrario, che si dia ad y ; cioè x avrà infiniti valori.

Analisi delle equazioni di grado più elevato del primo.

84. **N**Oi qui consideriamo solamente il caso, in cui nella equazione data non c'entri più d'un'incognita; negli altri casi, si dovranno maneggiare i metodi, che esporremo, conformemente a ciò, che s'è detto per le equazioni a più incognite di grado primo. Ma conviene prima di tutto distinguere l'equazioni che hanno tutte, o qualcuna delle sue radici commensurabili, e razionali, da quelle che le hanno immaginarie, o reali incommensurabili. Qualunque poi sia l'equazione, e qualunque il genere delle sue radici, dovrà sempre essere ridotta colle trasformazioni spiegate sopra, a non avere nè frazioni, nè radicali, nè altro coefficiente fuor dell'unità al primo, o più elevato suo termine.

85. Per le equazioni, che hanno qualche radice commensurabile. Si separi la data equazione in due somme qualunque, A , B ; per esempio in una si mettano tutte le quantità, che contengono una lettera conosciuta, e nell'altra si scrivano tutte le altre quantità. Ordinando queste due somme per x , si cerchi il massimo comune divisore delle medesime; se egli è un'equazione lineare, o di primo grado, ci darà un valore dell'incognita x ; altrimenti, dividendo la data equazione per questo massimo comune divisore, si avrà per quoto, o un'equazione lineare, che contiene un valore d' x , o un'equazione composta, che, moltiplicata col trovato comune divisore massimo, restituirebbe la data equazione; ciascuna di queste equazioni particolari si maneggi come la data, e le loro radici commensurabili saranno le radici della data.

86. Espongo il metodo per trovare il massimo comune divisore delle due somme A , B .

Si divida la maggiore quantità A per la minore B ; se la divisione si fa senza residuo, è evidente che B sarà il massimo di-

G 2

visore

visore cercato. 2.º Se v'ha qualche residuo C , non si badi al quoto della prima divisione, e si divida B per C ; se la divisione si fa senza residuo, sarà C il massimo divisore cercato. 3.º Si continui per simil modo l'operazione, non curando i quoti delle divisioni, ed il residuo D , che dividerà esattamente l'ultimo divisore, farà il divisore cercato.

Dimostrazione. 1.º Se d è divisore di a , farà d divisore di ma ; Se d è divisore di $a = b + c$, e di una delle parti b , farà d divisore dell'altra parte c ; questi sono affioni.

$$2.º \text{ Sia } \frac{A}{B} = m + \frac{C}{B} \dots \text{ farà } A = mB + C$$

$$\frac{B}{C} = n + \frac{D}{C} \dots \text{ farà } B = nC + D$$

$$\frac{C}{D} = p \dots \text{ farà } C = pD$$

3.º D è divisore di C ; dunque D è divisore di nC , e per essere D divisore di se stesso, farà D divisore di $nC + D = B$; e per la stessa ragione sarà D divisore di A ; dunque D è divisore comune di A, B . Inoltre; il massimo divisore di A, B , deve essere divisore di $mB + C$, cioè di C , e di nC , ossia di D ; dunque il massimo divisore di A, B non può essere diverso da D , altrimenti farebbe minore di un divisore D , cioè non farebbe il massimo.

87. 1.º Si potrebbe collo stesso metodo trovare il massimo comune divisore di più quantità A, B, C ; Si cerchi il massimo divisore q di A, B , ed il massimo comune divisore r di q, C , farà r il massimo comune divisore di A, B, C ; ma per ora noi non abbiamo bisogno di tanto. 2.º Il metodo di trovare il massimo divisore r di due quantità, serve ancora per ridurre una frazione a minimi termini, dividendo ciascun termine per r .

88. Se le date quantità A, B sieno quantità complesse, come lo sono veramente nel caso del num. 85., è necessario ordinarle

narle per rapporto ad una lettera; quindi 1.º Se nelle quantità A, B così ordinate si scopra ad occhio una quantità a , o numerica, od algebrica comune a tutti i termini d'amendue le quantità date, quella quantità comune farà un divisore da notarsi in disparte, ed il comune massimo divisore de' quozienti delle date quantità divise per a , si dovrà moltiplicare per quel primo divisore.

2.º Se prima di fare la divisione di A, B , si scopra che tutti i termini del divisore B siano moltiplicati per una stessa quantità a , che non sia divisore di A , si prenda per divisore $\frac{B}{a}$, trascurando a ; Sia detto lo stesso del dividendo A .

3.º Se l'esponente massimo della lettera, che distingue i termini sia minore in una quantità, che nell'altra, quella prima quantità si dovrà prendere per divisore, e l'altra per dividendo; Se l'esponente massimo della lettera, che distingue i termini sia eguale in A , ed in B , si può prendere qualunque delle due date quantità per dividendo.

4.º Se nel fare taluna delle prescritte divisioni, si trovi per quoto una frazione; Si riduca la frazione a minimi termini, e pel denominatore della ridotta si moltiplichi il dividendo, e si ricominci da capo l'operazione.

89. Applico il metodo del num. 85. ad un esempio. Si cerchino le radici commensurabili di $x^3 - 2ax^2 - 3a^2x - 3a^2b = 0$.

$$\begin{array}{r} - cx^2 + 3acx + 3abc \\ + bx^2 - 2abx \\ - bcx \end{array}$$

Si separi l'equazione in due somme; cioè in una si mettano, a cagione d'esempio, le quantità che contengono la lettera c , e nell'altra le altre; si avrà

$$A \dots x^3 - 2ax^2 - 3a^2x - 3a^2b; \text{ ed } -cx^2 + 3acx + 3abc$$

$$B \dots bx^2 - 2abx \qquad \qquad \qquad -bcx$$

Nella

Nella seconda somma c'entra in tutti i termini la lettera c , e dividendola per $-c$, si ha $B \dots x^3 - 3ax - 3ab$

Dividendo A per B , non si ha alcun residuo, cioè B è divisore di A , e di se stesso, cioè della proposta; ma per essere B un'equazione composta, si dovrà dividere la proposta per B , ed avendosi per quoto $x + a - c$, farà $x = c - a$ una delle radici cercate, e maneggiando B come se fosse la proposta, si avranno le altre due radici della proposta, cioè $x = 3a$; $x = -b$.

90. Il metodo precedente si applica soltanto alle equazioni letterali. Per le equazioni, o letterali, o numeriche, si rifletta, che l'ultimo termine di qualunque equazione è eguale al prodotto di tutte le radici; quindi è, che qualcuno de' divisori dell'ultimo termine della data equazione, sostituito invece dell'incognita x , col segno $+$, o col segno $-$ renderà la somma de' termini eguale a zero; Si cerchino adunque tutti i divisori dell'ultimo termine d'un'equazione; si sostituisca ciascuno di questi divisori, col segno $+$, e col segno $-$ invece dell' x ; tutti quegli, che faranno eguale a zero la somma de' termini dell'equazione, presi col segno contrario, saranno radici della medesima. Nell'equazione superiore, cercando tutti i divisori di $3abc - 3a^2b$, se ne troveranno tre, cioè b , $-3a$, $a - c$, che rendono l'equazione eguale a zero, se si sostituiscono invece dell' x ; Sarà dunque $x = -b$

$$x = 3a$$

$$x = c - a$$

La difficoltà di trovare tutti i divisori complessi dell'ultimo termine d'un'equazione letterale, fa preferire le più volte il metodo del numero precedente per trovare le radici d'una letterale equazione; ed il presente si riserva per le equazioni numeriche.

91. Se non si trovi verun comune divisore massimo delle due somme (num. 89.), o se nessuno de' divisori dell'ultimo termine

d'un'equazione, sostituito invece d' x , faccia eguale a zero (num. 90.) la somma de' termini d'un'equazione, egli è certo, che le radici della proposta equazione non sono commensurabili; ma sibbene, o reali incommensurabili, o immaginarie, o miste d'incommensurabili, e d'immaginarie. Dalle cose dette sulle radici immaginarie (num. 64.), è evidente, che nelle equazioni di secondo grado possono essere tutte le radici immaginarie; nelle equazioni di terzo grado possono essere al più due immaginarie, in quelle di quarto grado, o due, o tutte; in quelle di quinto, o due, o quattro... ec.; quindi nelle equazioni di grado impari almeno una delle radici è reale. Se l'equazione di terzo grado a tre radici reali, ed incommensurabili, con nessun artificio analitico si potranno trovare i loro valori, e questo caso si chiama caso *irreducibile*; Se l'equazione di quarto grado ha tre radici reali incommensurabili, la quarta sarà reale, e commensurabile da trovarsi coi metodi de' numeri precedenti. In generale poi trovato un valore a d'un'equazione ordinata per x ; dividendo la data equazione per $x - a = 0$, si abatterà d'un grado l'equazione medesima.

92. Si noti di più, che il vero grado delle equazioni non sempre è indicato dall'esponente massimo dell'incognita, per cui è ordinata. Le equazioni di secondo grado possono essere composte da due del primo; quelle di terzo possono essere composte da una del secondo, e da una del primo, oppure da tre del primo; quelle di quarto grado possono essere composte da quattro del primo, o da due del secondo, o da una del terzo, e da una del primo, e così nelle altre. Riservo (come al n. 58.) ad un'altra operetta la ricerca delle equazioni composte, che moltiplicate insieme formano l'equazione data; cioè la ricerca de' fattori complessi d'una data quantità. Supponendo ora, che le componenti siano della forma $x - a = 0$, se a è una quantità commensurabile, si troverà coi metodi già esposti, se a è una quantità

tità incommensurabile, si potrà trovare con quegli che esporrò qui sotto.

93. Finalmente si noti, che con facili sostituzioni si riducono molte equazioni di grado superiore alla forma delle equazioni di grado più depresso.

L'equazione $A \dots a^4 - \frac{2q}{b} a^2 + p^2 = 0$, che sembra di quarto

$$-pb^2$$

$$+\frac{1}{4}b^4$$

grado per l' a^4 , si riduce ad una del secondo, facendo $a^2 = t$;

cioè si riduce a $t^2 - \frac{2q}{b}t + p^2 = 0$; l'equazione A si chia-

$$-pb^2$$

$$+\frac{1}{4}b^4$$

ma *derivativa* del secondo grado. Così $B \dots b^6 - 2sb^4 + s^2b^2 - t^2$

$$+v b^2$$

$= 0$, che sembra, per il b^6 , di sesto grado, si riduce ad una del

terzo, facendo $b^2 = z$, cioè si riduce a $z^3 - 2sz^2 + s^2z - t^2$

$$+v z^2$$

$= 0$; l'equazione B , si chiama *derivativa* del terzo grado... ec.

E' evidente, che sostituendo le radici delle equazioni derivate t e z nelle supposte $a^2 = t$, $b^2 = z$, si avranno con una semplice estrazione di radici, i valori di a , b delle derivate.

94. Trovare il valore d' x delle equazioni di secondo grado

$$x^2 - px - q = 0.$$

Si supponga $x = y + \frac{1}{2}p$, affine di togliere il secondo termine

della data equazione, si avrà $y^2 - \frac{1}{4}p^2 = 0$; cioè $y^2 = \frac{1}{4}p^2$

$$- q$$

$+ q$, ed estraendo da amendue i membri di questa equazione la

ra-

radice seconda, si ha $y = \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$; ed essendo $x = y +$

$$\frac{1}{2}p, \text{ farà } x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$$

La preparazione di togliere il secondo termine della proposta equazione, si supporrà già fatta nel problema seguente, che comprende le equazioni d'ogni grado più elevato del secondo.

95. Trovare il valore d' x dell'equazione

$$A \dots x^m - Bx^{m-1} - Cx^{m-2} - Dx^{m-3} \dots - Q = 0.$$

1.º Si rappresenti la radice cercata x con tante lettere $a, b, c \dots$ ec. quante sono unità nell'esponente m del grado dell'equazione A , una meno; cioè per le equazioni di terzo grado, si supponga

$$x = a + b$$

per quelle di quarto... $x = a + b + c$

per quelle di quinto... $x = a + b + c + d$

.... ec.

2.º Si alzi ciascun membro di quest'equazione ipotetica alla potenza di grado m .

3.º Si separino dal secondo membro di quest'ultima equazione le quantità, che corrispondono ad x^{m-2} , x^{m-3} , ec.

4.º Si introducano nello stesso secondo membro gli x^{m-2} , x^{m-3} , invece de' loro valori espressi in a, b, \dots , e trasponendo si faccia tutta l'equazione eguale a zero; si avrà A' .

5.º Si suppongano i coefficienti de' termini di A' , eguali ai coefficienti de' termini corrispondenti di A , e combinando insieme le equazioni, che ne risulteranno, si ricavino i valori di $a, b, c \dots$ ec.

96. Prima di fare l'applicazione del metodo, è necessario dimostrare un teorema, che ha frequentissimo uso in tutta l'analisi, e su cui si appoggia tutta la risoluzione delle equazioni, che ora spieghiamo; egli è il seguente.

H

Sc

Se $ax + bx^2 + cx^3 \dots ec. = ex + fx^2 + gx^3 \dots ec.$ farà $a = e$
 $b = f$
 $c = g$
 $\dots ec.$

Il Sig. Sketch nel suo opuscolo inglese sulle *flussioni*, lo dimostra pel caso, che x sia una piccolissima frazione, o, come dicono più propriamente, una quantità infinitamente piccola. Si divida, dice, ciascun membro dell'equazione per x ; si avrà $a + bx + cx^2 \dots ec. = e + fx + gx^2 \dots ec.$, e per essere infinitamente piccola x , non si turberà l'equazione, sprezzando $bx, cx^2, \dots fx, gx^2 \dots$, farà dunque $a = e$. Levando ora dalla equazione già ridotta per mezzo della divisione, le quantità eguali a, e , farà $bx + cx^2 + \dots ec. = fx + gx^2 + \dots ec.$ sulla quale si potrà ripetere all'infinito la stessa dimostrazione.

Quando l' x non sia una quantità infinitamente piccola, cioè che sempre si suppone nell'Analisi finita, è evidente, che riducendo l'equazione alla forma $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \dots ec. = 0$, il coefficiente a conterrà la somma delle radici, b il prodotto delle radici prese due a due... ec.; dunque se questa equazione si suppone identica con $x^m + ex^{m-1} + fx^{m-2} \dots ec. = 0$, il coefficiente e conterrà la somma delle radici della prima equazione; b il prodotto delle medesime, prese a due a due... ec.; cioè farà $a = e$;

$b = f$
 $\dots ec.$ Quindi a ragione suppongono gli Analisti eguali i termini, o i coefficienti de' termini corrispondenti di due date equazioni identiche: Intendono essi che ciò si faccia, quando dicono di *paragonare i termini* di due date equazioni supposte eguali.

97. Applicazione del metodo. Sia la proposta di grado terzo $A \dots x^3 - 3ax - a^3 = 0$, e la radice cercata $x = a + b$; farà $x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Quale è in questo secondo membro la quantità, che è moltiplicata

cata per $x = a + b$? Fatta un po' di riflessione, si vede subito, che $3a^2b + 3ab^2$ è eguale a $3ab$ moltiplicato per $a + b$, cioè per x ; invece dunque di $3a^2b + 3ab^2$ si potrà scrivere $3abx$, e si avrà

$$A \dots x^3 - 3abx - a^3 = 0$$

che è un'equazione identica all' A . Quindi $3ab = p$
 $a^2 + b^3 = q$) = B

Dalla prima di queste equazioni si ha $a + b = \frac{1}{3} p$

$$a^2 + b^3 = \frac{1}{27} p^3$$

e dalla seconda si ha $(a^2 + b^3) a^3 = a^3 q$
 cioè $a^6 + a^3 b^3 = a^3 q$,

e fatta la sostituzione del valore di $a^3 b^3$ dedotto dalla prima equazione si ha $a^6 - qa^3 = -\frac{1}{27} p^3$

che è un'equazione derivativa di secondo grado; d'onde

$$a^3 = \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3}}$$

Resta a determinarsi il b ; ma sostituendo il valore di a , e di a^3 nelle equazioni B, si ha

dalla prima

$$b = \frac{p}{3a} = \frac{p}{3 \sqrt[3]{\frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3}}}$$

H 2 c dalla

e dalla seconda

$$b = \sqrt[3]{q - a^3} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}P^3}}$$

donde

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}P^3}} + \frac{P}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}P^3}}}$$

oppure

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}P^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}P^3}}$$

98. Sia la proposta $A \dots x^4 - px^3 - qx - r = 0$, e la radice cercata $x = a + b + c$; farà

$$\begin{aligned} x^4 &= a^4 + 4ab^3 + 6b^2a^2 + 4b^3a + b^4 = 0 \\ &+ 4ca^3 + 12b^2ca^2 + 12b^3ca + 4b^3c \\ &+ 6c^3a^2 + 12bc^2a + 6b^2c^2 \\ &+ 4c^3a + 8bc^3 \\ &+ c^4 \end{aligned}$$

Qual'è

Qual'è in questo secondo membro la quantità, che è moltiplicata per $x^2 = (a+b+c)^2$, e quale è quella, che è moltiplicata per $x = a+b+c$? Si disponga il secondo membro nel modo seguente

$$\left. \begin{aligned} 4ca^3 + 2ba^2 + 4b^3a + 2b^4 \\ + 8bca^2 + 8b^2ca + 4b^3c \\ + 8c^3a^2 + 4bc^2a + 2b^3c^2 \\ + 4c^3a \end{aligned} \right\} = B$$

$$\left. \begin{aligned} 4ba^2 + 4b^2a^2 + 4bc^2a + 4b^2c^2 \\ + 4bca^2 \qquad \qquad + 4bc^2 \end{aligned} \right\} = C$$

$$\left. \begin{aligned} a^4 + 4ca^3 - 2c^2a^2 + 4b^3ca + c^4 \\ - b^4 \end{aligned} \right\} = D$$

Facendo la divisione di B per x^2 , ossia per $(a+b+c)^2$, si troverà

$$B = (2b^3 + 4ac)(a+b+c)^2 = (2b^3 + 4ac)x^2,$$

e facendo la divisione di C per x , ossia per $a+b+c$, si troverà

$C = (4ba^2 + 4bc^2)(a+b+c) = (4ba^2 + 4bc^2)x$
restando D non divisibile per x , cioè senza x per fattore.
Quindi l'equazione ipotetica si cambierà in questa

$$\begin{aligned} A^1, \dots, x^4 - 2b^3x^2 - 4ba^2x - a^4 &= 0 \\ - 4acx^2 - 4bc^2x + 2c^2a^2 & \\ - 4b^2ca & \\ - c^4 & \\ + b^4 & \end{aligned}$$

Para-

Paragonando A' con A , si ha $1.^\circ b^6 - \frac{1}{2} p b^4 + \frac{1}{4} r b^2 - \frac{1}{64} q^2 = 0$

$$+ \frac{1}{16} p^2 b^2$$

$$2.^\circ a^4 - \frac{q}{4b} a^2 + \frac{1}{16} p^2 = 0$$

$$- \frac{1}{4} p b^2$$

$$+ \frac{1}{4} b^4$$

$$3.^\circ c = \frac{p - 2b^2}{2a}$$

La prima equazione è derivativa del terzo grado, e darà b ; la seconda è derivativa del secondo grado, e darà a ; la terza è di primo grado, ed esprime il valore di c .

Per applicare queste equazioni più comodamente alle formole de' num. precedenti, si introducano alcune denominazioni ausiliarie ad arbitrio, da rimetterfi al primo valore dopo finiti i calcoli necessari per iscioglierle; così nella prima equazione fatto $p = 4s, q = 8t, r = 4v$, si avrà

$$b^6 - 2s b^4 + s^2 b^2 - t^2 = 0$$

$$+ v b^2$$

99. È evidente, che il metodo è universale per ogni grado; per avere le radici d'un' equazione di quinto grado, si dovrà sciogliere un' equazione di quarto grado, una del terzo, una del secondo, ed una del primo, ed in generale, per avere le radici d'un' equazione di grado m , si dovranno sciogliere tutte le equazioni di grado inferiore fino inclusivamente il primo. Vero è, che per la lunghezza de' calcoli che devono farsi in questo metodo, si ha ricorso ad altri metodi più semplici, presi dalle equazioni indeterminate; noi gli spiegheremo altrove; in-

tanto

tanto credo, che farà piacere ai lettori il vedere come con una sola trasformazione del primo termine di qualunque data equazione, si hanno le sue radici. Il Varignon (Acad. Royal. 1699.) ha trovate per questa strada le radici delle equazioni di secondo e terzo grado solamente, senza accennare che si poteva stendere a tutte l'altre equazioni.

100. Per l'equazione $x^3 + px + q = 0$; 1.º Se $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} q^2$, le due radici positive, o negative (la somma delle quali è eguale alla terza), sono sempre eguali tra se: Se il p sia negativo, ed $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} q^2$, due radici dell' equazione sono immaginarie:

Se $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} q^2$, le tre radici sono tutte reali, ed ineguali.

2.º Nel primo caso, ciascuna delle radici eguali farà sempre $\frac{3q}{2p}$: Nel secondo caso (che, per le cose dette, vale anche quando il solo p sia positivo), si chiami r^2 un quadrato maggiore di p , ed $s = r^2 + p$, se sia $\frac{q}{s} = r$, farà

$\frac{+q}{s}$ la radice dell' equazione, quando essa sia commensurabile;

Nel terzo caso, $\frac{+q}{s}$ farà, come prima, la radice massima dell' equazione, e preso r^2 minore di p farà similmente una delle minori radici. Il segno da premetterfi al valore delle radici trovate sarà sempre contrario al segno de' quoti delle accennate divisioni, e se non si trovi l' r^2 colle due proprietà indicate, la radice sarà incommensurabile da cercarsi colla formola dimostrata.

3.º Comunque nel caso irridutibile la formola generale dia le

ra-

radici dell' equazione sotto forme immaginarie, riducendo in serie infinite la formola medesima, si avrà un' approssimazione alle radici vere, e spogliata delle quantità immaginarie. La dimostrazione di questa verità appartiene al libro secondo di questa trattazione, dove si parla delle serie infinite; fatto $\frac{1}{2} q = a$, e

$$\sqrt{\frac{1}{2} q^2 - \frac{a}{27} p^3} = b \sqrt{-1},$$

$$\text{farà } x = \sqrt[3]{a + b \sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a - b \sqrt{-1}},$$

e svolgendo in serie ciascuno di questi radicali, la loro somma farà reale, e se una delle quantità b , a sia molto maggiore dell' altra, con pochi termini della serie si avrà un valore d' x sufficientemente vero; come ciascuno potrà vedere da se, dopo la teoria dell' evoluzione delle serie. Queste riflessioni sulle radici delle equazioni di terzo grado, daranno molto lume per le radici di grado quarto: Conchiudo questa Introduzione con un problema.

101. Problema. Due sorgenti, ciascuna delle quali scola uniformemente, hanno empito uno de' sottoposti conservatoj a , la prima nel tempo b , la seconda nel tempo c , ed il conservatojo d , la prima nel tempo e , la seconda nel tempo f ; si cerca quant' acqua sia uscita da ciascuna sorgente.

1.º Siano x , y le quantità d' acqua, cioè il numero a cagione d' esempio de' secchi d' acqua usciti ad empire le conserve a , d , nel corso di giorni b , c , e , f . Sarà bx la quantità d' acqua uscita dalla prima sorgente nel tempo b , e cy la quantità d' acqua uscita dalla seconda sorgente nel tempo c ; per le condizioni del problema, queste due quantità d' acqua devono essere
eguali

eguali alla quantità d' acqua a , che empie il conservatojo; si avrà dunque $bx + cy = a$.

2.º Se nel problema non entrasse altra condizione che questa, non si potrebbe determinare nè l' x , nè l' y , se non mettendo un arbitrario valore ad y , o ad x ; avendosi, trasponendo

$$bx = a - cy$$

$cy = a - bx$, e dividendo la prima equazione per b , e la seconda per c , si avrebbe

$$x = \frac{a - cy}{b}$$

$y = \frac{a - bx}{c}$, e facendo $y = b$ nella prima, ed $x = k$ nella seconda, si avrebbe

$$x = \frac{a - cb}{b};$$

$y = \frac{a - bk}{c}$ questo problema perciò sarebbe indeter-

minato, ed ammetterebbe infinite soluzioni, secondo gli infiniti arbitrarj valori di b , e di k .

3.º Ma la seconda condizione del proposto problema, ci dà una nuova equazione, e determina con ciò ad una sola soluzione i valori delle due incognite x , y ; dacchè si avrà ex , fy per le quantità d' acqua sparite nel tempo e , f , che prese insieme devono essere eguali a d ; cioè $ex - fy = d$.

4.º Mettendo in questa equazione il valore d' x preso nella prima, e sostituendo nella prima il valore d' y preso da questa seconda

equazione, si ha $x = \frac{cd - af}{ce - bf}$.

$$y = \frac{ae - db}{ce - bf}.$$

102. Se sia $a = 195$ $d = 330$; farà $x = 30$

$$b = 2 \quad e = 5 \quad y = 45$$

$$c = 3 \quad f = 4$$

Se $a = 120$ $d = 190$; farà $x = -30$

$$b = 4 \quad e = 3 \quad y = 40$$

$$c = 6 \quad f = 7$$

Questi risultati adempiono esattamente tutte le condizioni del problema; nè si può anche per ciò dubitare della loro esattezza; ma che significa quel -30 ? Si ritenga il significato del segno $-$; si cerca qui quanta sia l'acqua che esce dalla prima sorgente, e si trova che n' esce -30 misure; lo stato opposto all'uscire non è altro che l'entrare; onde la prima sorgente tanto non ne perde, che anzi ne acquista 30, ne ruba invece di darne, invece d'impovertire arricchisce; se ciò non può succedere in qualche caso particolare, o per la natura, o per la posizione delle sorgenti, farà pure impossibile, che si sieno verificate in quel caso le condizioni date.

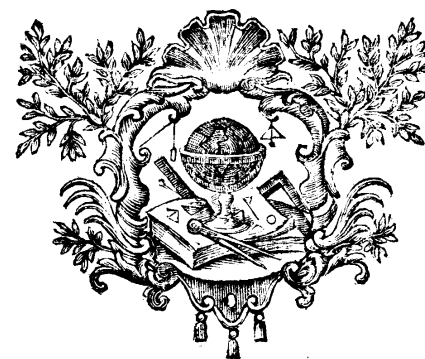
103. Se oltre la somma delle perdite d'acqua a, d , ed oltre i tempi b, c, e, f si desse ancora il prodotto delle due perdite; cioè $xy = g$, il problema avrebbe più condizioni, o più equazioni che incognite; cioè sarebbe più che determinato. Questo eccesso di equazioni, o condizioni rendono per lo più impossibile il problema; cioè nel caso nostro farà impossibile il proble-

ma sempre che g non farà eguale a $\frac{cd - af}{ce - bf} \times \frac{ae - db}{ce - bf} = b$, e

quando ciò succeda, si avrà sempre un'equazione identica; cioè $g = b$, cioè la condizione aggiunta farà un'equazione inutile al problema, già sciolto per le altre due. Ben è vero, che l'identità delle equazioni non sempre mostra l'inutilità delle condizioni date; talvolta è segno, che la questione malamente fu proposta a modo di problema, ma si veramente doveva profe-

rirsi

rirsi come un teorema; talvolta altresì mostra, che si è assunta una condizione superflua, ommessa quella che era necessaria alla soluzione del problema; talvolta finalmente indica, che s'è commesso errore nel calcolo.



LIBRO PRIMO.

Progressioni geometriche, ed aritmetiche.

CAPO PRIMO.

Delle ragioni geometriche, ed aritmetiche.

Nozioni generali sulle ragioni, e proporzioni geometriche.

LA teoria delle Progressioni geometriche, ed aritmetiche, suppone quella delle geometriche, ed aritmetiche ragioni, ed immediatamente trae seco la teoria de' logaritmi. Questa sarà la materia de' tre capi, in cui va distinto il presente libro, e la tratterò, spero, non senza qualche particolare eleganza, usando ad ogni passo gli artifici analitici, poc' anzi spiegati nell' introduzione.

2. **Ragioni geometriche.** Le voci *ragioni*, *rapporto*, significano un confronto, o un paragone di una quantità qualunque con un' altra; quando si paragona una quantità con un' altra per conoscere quante volte, o come la prima contenga l' altra, o sia nell' altra contenuta, quel rapporto, e quella ragione delle due date quantità si chiama rapporto, o ragione *geometrica*, o senz' altro aggiunto, *ragione*.

3. E' evidente. 1.º Che per avere una ragione geometrica si richieggono nè più nè menò di due termini; cioè quello, che si paragona, e quello, a cui si paragona.

2.º Che la ragione geometrica di questi due termini si conosce colla divisione d' uno d' essi per l' altro.

3.º Che quindi si può dinotare la ragione geometrica co' soliti due punti di divisione, o a modo d' una frazione volgare, e allora $a : b$, oppure $\frac{a}{b}$ si legge *a sta a b*.

4.º Che la proprietà delle frazioni volgari si convengono alle

ragioni geometriche, e quelle delle ragioni geometriche si convengono alle frazioni volgari.

5.^o Che le quantità, tralle quali si fa il paragone per iscoprire la ragione di *contenenza* d'una nell'altra, devono essere della medesima specie, ed insieme considerate come quantità, o numeri astratti; cioè non considerate secondo il loro essere specifico, ma secondo l'essere numerico di ciascuna.

4. Nelle ragioni geometriche. 1.^o Il primo termine, che si paragona coll'altro, si chiama *antecedente*, ed il secondo *conseguente* della ragione; il quoto della divisione dell'antecedente per il conseguente, si chiama *esponente* della ragione, e se l'esponente della ragione è una frazione, si suppone essa ridotta a minimi termini.

2.^o Se l'antecedente è eguale al conseguente, la ragione geometrica si chiama *ragione d'uguaglianza*: Se l'antecedente è maggiore del conseguente, la ragione sarà di *maggior disuguaglianza*: Se l'antecedente è minore del conseguente, la ragione sarà di *minore disuguaglianza*.

3.^o Se il rapporto, che in una ragione ha l'antecedente al conseguente sia lo stesso che il rapporto, che in un'altra ragione ha il conseguente all'antecedente, si dice, che i termini della prima tra loro stanno in ragione *inversa*, o *reciproca* de' termini della seconda; e se l'antecedente di una ragione ha al suo conseguente lo stesso rapporto, che l'antecedente di un'altra al suo conseguente, si dice, che i termini della prima stanno fra loro in ragione *diretta* de' termini della seconda ragione.

4.^o Se si moltiplichino insieme molte ragioni *semplici* $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$; si chiama $\frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f}$ ragione *composta* delle date. Se le

ragioni componenti sono tutte tra se eguali, la ragione composta delle date ragioni prese due a due, si chiama *ragione duplicata*: prese a tre a tre *triplicata*: prese n ad n , *n^{ta} plicata* di qualunque delle date: Ciascuna delle ragioni componenti, sta in ragione *sudduplicata* della composta sua *dupplicata*: *sut-*

tri-

triplicata della composta sua triplicata; Su n^{ta} *plicata* della composta sua n^{ta} *plicata*.

5. Affiomi sulle ragioni semplici e composte. 1.^o Le ragioni eguali hanno esponenti eguali, e le ragioni, che hanno esponenti eguali, sono eguali.

2.^o Le ragioni disuguali hanno esponenti disuguali, e le ragioni d'esponenti disuguali sono disuguali.

3.^o In due, o più ragioni, quella è maggiore, o minore delle altre, che ha l'esponente maggiore, o minore, e se l'esponente d'una ragione è maggiore, o minore dell'esponente delle altre, quella ragione è maggiore, o minore delle altre.

4.^o Se si paragonino due quantità disuguali a, b , ad un'altra d , la più grande a avrà una maggior ragione a d che le altre, e quella tra a, b , che avrà una maggiore ragione a d , sarà maggiore delle altre.

5.^o Paragonando una quantità d a due quantità disuguali a, b , la ragione di d alla più grande a sarà minore della ragione di d all'altra, e se la ragione di d ad una quantità a sarà minore della ragione di d all'altra, sarà a maggiore dell'altra.

6.^o Le ragioni di d a diverse quantità eguali sono eguali, e se sono eguali le ragioni di d a diverse quantità, queste faranno tra se eguali.

7.^o Non si muta la ragione di a a b comunque si moltiplichino; o si divida a, b per una stessa quantità, o per quantità eguali; essendo $\frac{m a}{m b} = \frac{a}{b}$.

10.^o Quindi se i termini d'una ragione sieno ugualmente, o summultipli, o summultipli de' termini d'un'altra, quella prima ragione sarà a questa eguale.

6. Affiomi sulle ragioni composte. 1.^o Se sono eguali ciascuna a ciascuna le ragioni, che compongono due ragioni composte, le ragioni composte sono eguali.

2.^o Se

2.º Se una ragione è composta di alcune date ragioni, ogni sua eguale si potrà concepire composta delle ragioni medesime.

3.º Se vi siano due ragioni, composte ciascuna da più ragioni, e tutte le componenti della prima e della seconda, toltane una per una, sieno eguali, quelle due residue ancora saranno eguali.

7. Proporzioni geometriche. L'egualianza di due ragioni geometriche, si chiama *proporzione geometrica*, o, senz'altro aggiunto, *proporzione*, o *analogia*; Quindi la teoria delle proporzioni è la stessa, che la teoria delle ragioni eguali.

8. E' evidente. 1.º Che per una proporzione vi vogliono nè più nè meno di quattro termini.

2.º Che la proporzione di quattro termini si conosce dall'egualianza de' quoti del primo termine diviso pel secondo, e del terzo diviso per il quarto; cioè dall'egualianza degli esponenti delle date ragioni.

3.º Che quindi la proporzione di quattro termini a, b, c, d , si può indicare così $a:b=c:d$, oppure $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, o segnando so-

lamente le parti estreme del segno d'egualianza si scrive $a:b::c:d$, e si legge a sta a b , come c sta a d .

4.º Se qualunque specie di quantità si esprima co' numeri, relativi ad una unità arbitrariamente assunta in ogni specie, potranno sostituirsi questi per quelle in ogni proporzione, ed allora i quattro termini d'una proporzione saranno tutti dell'istessa specie.

9. Quanto a quest'ultima riflessione, si noti, che la ragione è un numero, e due ragioni sono due numeri, che risultano da due confronti, che ponno farsi l'uno su d'una specie, e l'altro sull'altra; così lo spazio A , doppio dello spazio B , sta a B come un tempo a , doppio del tempo b , sta a b ; ma finchè la proporzione sta espressa così, non si possono fare varie operazioni, che pure sono necessarie a farsi, sulle proporzioni; tale è l'alternazione, ed il prodotto delle quantità eterogenee (dell'

alter-

alternazione parleremo da qui a poco); in questi casi è sempre uopo esprimere in puri numeri le quantità, che servono di termini alla proporzione, e considerare a cagione d'esempio negli spazj A, B , e ne' pesi a, b , non l'essere di spazio, e di tempo, ma l'essere di doppio d'uno spazio, o d'un tempo, rispetto all'altro spazio, ed all'altro tempo.

A meglio dichiarare questa importante verità, foggio qui le parole del Sig. d'Alembert (*Traité de Dynamique*, alla nota del num. 14.). Essendo, dice egli, lo spazio, ed il tempo di diversa natura, ben si vede, che non si può dividere lo spazio per il tempo: quindi il dire, che le velocità sono come gli spazj divisi per i tempi, egli è un dire, che le velocità sono come i rapporti degli spazj ad una stessa misura comune, divisi per i rapporti de' tempi ad un'altra comune misura; cioè, che se si prenda, a cagione d'esempio, il piede per la misura degli spazj, ed il minuto per la misura de' tempi, le velocità di due corpi, che si muovono uniformemente, sono tra se come i numeri de' piedi scorsi da ciascuno, divisi per i numeri de' minuti da ciascuno impiegati a scorrergli, e non come i piedi divisi per i minuti.

Così egli; ed a dire più corto colle parole del discorso preliminare del medesimo autore, dividere i spazj per i tempi per avere la ragione delle velocità di due corpi, significa trovare la ragione, che ha la ragione delle parti dello spazio alla sua unità, alla ragione delle parti del tempo alla sua unità.

10. In qualunque proporzione $a:b::c:d$ i termini a, c si chiamano *antecedenti* della proporzione, cioè a primo antecedente, e il secondo; i termini b, d si chiamano *conseguenti* della proporzione, cioè b primo conseguente, d secondo conseguente. I termini a, d si chiamano *estremi*, i termini b, c *medj*; ciascuno de' termini antecedenti, o conseguenti si chiama *omologo* all'altro antecedente, o conseguente; ciascuno de' termini estremi può chiamarsi *analogo* all'altro estremo, e ciascun de' termini

K

medj

medj può chiamarsi *analogo* all' altro medio: Se i termini di mezzo sono uno stesso termine replicato, la proporzione si chiama *continua*, ed i termini sono *continuamente* proporzionali: Se i termini di mezzo sono tra se disuguali, la proporzione si chiama *discreta*, ed i termini sono *discretamente* proporzionali; il termine di mezzo d'una proporzione continua si chiama *medio geometricamente*, o, senz'altro, *medio* proporzionale.

Proprietà comuni alle eguali ragioni geometriche semplici, e composte.

11. SE $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, farà $ad = bc$

Dim. Si moltiplichi ciascun membro dell' equazione data per il prodotto de' confeguenti; o più brevemente, si levino le frazioni dalla data frazione; si avrà $ad = bc$.

12. Se $ad = bc$, farà 1.^o $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$2.^{\circ} \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$3.^{\circ} \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Dim. Si divida ciascun membro della data equazione

1.^o per bd , si avrà la prima)

2.^o per ac , si avrà la seconda) analogia.

3.^o per cd , si avrà la terza)

13. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, farà 1.^o $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ *invertendo*

$$2.^{\circ} \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ alternando}$$

Dim.

Dim. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, farà (num. 11.) $ad = bc$; ma se $ad = bc$, si

ha (num. 12.) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, ed $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; dunque se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, farà ... ec.

14. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, farà 1.^o $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ *componendo*.

$$2.^{\circ} \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \text{ dividendo.}$$

Dim. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, farà $\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1$, ossia $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

15. Se in a, b, c, d, e, f sia $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$, e $\frac{b}{c} = \frac{e}{f}$,

farà $\frac{a}{d} = \frac{c}{f}$ *ordinando*.

Dim. Dalla prima analogia si ha $\frac{b}{c} = \frac{a}{d}$, e dalla seconda

si ha $\frac{b}{c} = \frac{e}{f}$; dunque $\frac{a}{d} = \frac{c}{f}$.

16. Se nelle stesse quantità sia $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$, e $\frac{b}{c} = \frac{d}{e}$,

farà pure $\frac{a}{d} = \frac{c}{f}$, *perturbando*.

Dim. Dalla prima analogia si ha $af = be$, e dalla seconda

si ha $be = cd$; dunque $af = cd$, d'onde $\frac{a}{d} = \frac{c}{f}$.

17. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ed $\frac{e}{b} = \frac{f}{d}$,

farà 1.^o $\frac{a+e}{b} = \frac{c+f}{d}$ *conjungendo*.

2.^o $\frac{a-e}{b} = \frac{c-f}{d}$ *disgiungendo*.

K 2

Dim.

Dim. Dalla prima analogia si ha $ad = bc$, e dalla seconda $ed = bf$; dunque sommando, e sottraendo la seconda equazione dalla prima si ha $ad \pm ed = bc \pm bf$, cioè $(a \pm e)d = (c \pm f)b$; d'onde $\frac{a \pm e}{b} = \frac{c \pm f}{d}$.

18. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \dots$ ec., si ha

$$1.^{\circ} \frac{a+c+e \dots \text{ec.}}{b+d+f \dots \text{ec.}} = \frac{e}{f} = \frac{a}{b} = \dots \text{ec. sommando.}$$

$$2.^{\circ} \frac{a-c-e \dots \text{ec.}}{b-d-f \dots \text{ec.}} = \frac{e}{f} = \frac{a}{b} = \dots \text{ec. sottraendo.}$$

Dim. Dalle date ragioni si ha (num. 17.) $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$;

donde $\frac{a+c}{e} = \frac{b+d}{f}$, ed $\frac{a+c+e}{e} = \frac{b+d+f}{f}$;

dunque $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{e}{f} = \frac{a}{b} = \dots$ ec.

19. Dati a, b , si ha 1.^o $1 : a :: b : ab$

$$2.^{\circ} 1 : \frac{a}{b} :: b : a$$

La dimostrazione è manifesta dal num. 11., e dalla definizione della moltiplicazione, e divisione di a per b .

20. Ben m'avveggo, che le formole così *seccamente* esposte in quest' articolo cagioneranno imbarazzo ai meno esercitati; accompagneranno essi, o mentalmente, o colla penna in mano tutti i calcoli accennati, o stessi ne' num. precedenti, ma all' ultimo non sapranno quale sia la formalità, che è stata presa di mira in ciascuna operazione. Conviene però avvezzarsi ad intendere il linguaggio algebrico, muto sì, ma, a chi ben lo penetra,

tra, assai più d'ogni favella espedito, e penetrante: Si usano i caratteri algebrici per generalizzare le proposizioni: Sta alla fantasia il sostituire agli $a, b \dots$ le astratte, o contratte idee delle quantità, di cui nasce il discorso. Quando per esempio si dice, che se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, farà $ad = bc$, s'intenda, che in quattro

termini geometricamente proporzionali, il prodotto degli estremi è eguale al prodotto de' medj; quando si dice, che se $ad = bc$,

farà $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \dots$ ec., s'intenda, che se si separi in due fattori

ciascun membro d'un' equazione, si potrà formare con essi reciprocamente presi un' analogia, nella quale se si alternino, o invertano i termini, non si turberà la proporzionalità; od anche, che se in quattro quantità a, b, c, d il prodotto delle estreme è eguale al prodotto di quelle di mezzo, quelle quattro quantità faranno in proporzione geometrica.

21. Si notino principalmente que' dieci modi d'argomentare usitatissimi in tutto il calcolo, ed anche nella geometria. 1.^o Se il prodotto di due termini sia eguale al prodotto di due altri termini, comunque essi si ordinino in un' analogia, si conserverà sempre la proporzione, purchè sieno messi per termini analoghi i termini dello stesso prodotto: Tutto ciò si sarebbe potuto esprimere colla sola formola se $ad = bc$, farà $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, indicandosi con ciascuna lettera qualunque termine dello stesso prodotto.

2.^o Se quattro termini sono proporzionali, lo saranno sempre, comunque si permutino di sito tra se, purchè que', che sono medj, o estremi nella data analogia restino nelle altre, o estremi, o medj. Due di queste permutazioni hanno nome particolare, e sono l'*alternare*, ove il terzo va ad essere secondo, ed il secondo termine passa ad essere terzo, e l'*invertere*, ove i

con-

conseguenti divengono antecedenti, e gli antecedenti, conseguenti; le altre permutazioni non hanno nome proprio, e non son altro che alternazioni, o inversioni ripetute nelle analogie, che nascono dalla prima alternata, o inversa, e sono in tutto sette.

Sia $a:b::c:d$

Sarà..... I. $a:c::b:d$ alternando la data

II. $b:a::d:c$ invertendo la data

III. $b:d::a:c$ alternando la II.^a

IV. $d:b::c:a$ invertendo la III.^a

V. $d:c::b:a$ alternando la IV.^a

VI. $c:d::a:b$ invertendo la V.^a

VII. $c:a::d:b$ alternando la VI.^a

3.º Se i conseguenti d'un'analogia siano antecedenti d'un'altra, si argomenta *ordinatamente*, ommettendo i termini comuni alle due analogie, e prendendo gli altri termini per termini d'una proporzione; cioè facendo termini della prima ragione i termini dell'analogia, in cui si sono ommessi i conseguenti, e termini della seconda ragione i termini dell'analogia, in cui si sono ommessi gli antecedenti.

4.º Se i termini estremi d'una analogia siano i termini di mezzo d'un'altra, si argomenta *perturbatamente*; cioè lasciati i termini comuni si prendono per i due estremi i termini dell'analogia, in cui si sono ommessi i medj.

5.º Se solamente gli antecedenti siano diversi in due analogie, e rispettivamente eguali i conseguenti, si argomenta *congiuntamente*; cioè si congiungono in una proporzione agli antecedenti della prima gli antecedenti della seconda analogia.

6.º ... ec.

Dalle dette diverse specie d'argomentare, se ne possono dedurre delle altre non meno utili di quelle prime. 1.º La somma de' termini della prima ragione d'una proporzione, sta alla somma de'

de' termini della seconda ragione, come il primo conseguente sta al secondo.

2.º La differenza de' termini della prima ragione sta alla differenza de' termini della seconda ragione, come il primo conseguente sta al secondo.

3.º La somma de' termini della prima ragione sta alla somma de' termini della seconda ragione, come la differenza de' primi termini alla differenza de' secondi.

4.º La somma de' termini d'una ragione sta alla differenza de' medesimi, come la somma de' termini d'una ragione eguale sta alla loro differenza.

5.º ... ec.

22. Invertendo la seconda analogia del num. 19. si ha $\frac{a}{b}$:

$1::a:b$; questo è il fondamento della teoria delle frazioni; cioè la frazione sta all'unità, come il numeratore sta al denominatore; quindi 1.º se il numeratore d'una frazione è eguale, maggiore, o minore del denominatore, la frazione sarà eguale, maggiore, o minore dell'unità.

2.º Se le frazioni hanno un medesimo denominatore, sono tra se in ragione diretta de' numeratori.

3.º Se le frazioni hanno un medesimo numeratore, sono tra se in ragione reciproca de' denominatori.

4.º Quindi se le frazioni hanno diversi numeratori, e diversi denominatori, sono tra se in ragione composta della diretta de' numeratori, e dell'inversa de' denominatori.

23. Lascio all'industria di chi vuole ben apprendere la teoria delle proporzioni il dedurre dalle cose premesse varj altri teoremi, per mezzo delle trasformazioni; ne accenno alcuni.

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, farà $ad = bc$; E 1.º Se $b = c$, farà $ad = b^2 = c^2$;

cioè in tre termini continuamente proporzionali, il prodotto de' gli

gli estremi, è eguale al quadrato del medio; e conseguentemente se in tre quantità a, b, d il prodotto ad delle estreme sia eguale al quadrato b^2 di quello di mezzo; quelle tre quantità sono in continua proporzione geometrica.

2.º Estrahendo la radice quadrata da amendue i membri di quest' ultima equazione $ad = b^2$, si ha $b = \sqrt{ad}$; cioè il termine

di mezzo d'una proporzione continua, è eguale alla radice quadrata del prodotto de' due estremi.

3.º Se a, d fossero due quadrati come f^2, g^2 , il prodotto fg delle loro radici quadrate sarebbe medio proporzionale tra a, d ; essendo $f^2 : fg :: fg : g^2$.

4.º Dividendo l'equazione $c^2 = ad$ per a , e per d ; si ha

$\frac{c^2}{a} = d, \frac{c^2}{d} = a$; cioè qualunque de' due estremi d'una proporzione continua è eguale al quadrato del termine di mezzo diviso per l'altro estremo.

5.º Dividendo allo stesso modo l'equazione $ad = bc$, primo per d , poi per c , indi per b , e finalmente per a , si ha

$$a = \frac{bc}{d} \dots c = \frac{ad}{b}$$

$$b = \frac{ad}{c} \dots d = \frac{bc}{a}$$

cioè qualunque termine d'una proporzione è eguale al prodotto de' termini non analogi, diviso per il suo analogo.

6.º Quindi si sciolgono i quattro prob'emi seguenti. Dati due termini qualunque d'una proporzione continua trovare il terzo. Dati tre termini qualunque d'una proporzione discreta trovare il quarto: Trovare una media proporzionale tra due date quantità: Trovare un quadrato eguale al prodotto di due date quantità.

Pro-

Proprietà comuni alle ineguali ragioni geometriche semplici, e composte.

24. **D** Atc $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, farà $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: ad : bc$.

Dim. Si divida ad, bc per la stessa quantità bd ;

farà $\frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} :: \frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: ad : bc$.

25. Se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; farà (multiplicando le due ragioni per bd)

$ad > bc$; e se $ad > bc$, dividendo tutto per bd , farà $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

26. Se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; sia $\frac{a}{b+x} = \frac{c}{d}$; farà $\frac{b+x}{a} = \frac{d}{c}$;

cioè $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$; invertendo.

27. Se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, farà $\frac{a}{b} + 1 > \frac{c}{d} + 1$;

cioè $\frac{a+b}{b} > \frac{c+d}{d}$; componendo.

28. Se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, farà $\frac{a}{b} - 1 > \frac{c}{d} - 1$;

cioè $\frac{a-b}{b} > \frac{c-d}{d}$; dividendo.

29. Se $\frac{a}{b} > \frac{d}{e}$, e $\frac{b}{c} > \frac{e}{f}$, farà $\frac{a}{d} > \frac{b}{e}$, e $\frac{b}{e} > \frac{c}{f}$;

cioè $\frac{a}{d} > \frac{c}{f}$; ordinando.

L

30. Sc

30. Se $\frac{a}{b} > \frac{c}{f}$, e $\frac{b}{c} > \frac{d}{e}$, farà $af > be$, e $be > cd$;
cioè $\frac{a}{d} > \frac{c}{f}$; perturbando.

31. Se $a > c$; $b > d$, ed $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, farà $ad > bc$,
ed $(ad \pm ab) > (bc \pm ab)$; d'onde $\frac{a}{b} > \frac{c \pm a}{d \pm b}$.

32. Se $a+b:c+d::a:c$, ed $a+b$ la massima,
farà $a+b:e+d::a:c::b:d$;
d'onde $b > d$, ed $(a+b+c) > (c+d+a)$.

33. Da questi modi d'argomentare sulle ineguali ragioni se
ne possono dedurre altri assai, come nell' articolo precedente:
Si poteva mettere il primo teorema di quest' articolo per teore-
ma fondamentale di tutte le proporzioni: Se $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}::ad:bc$;
fatto $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, farà $ad=bc$; quindi si ha un nuovo metodo
per formare una proporzione da' membri d'un' equazione;
se $ad=bc$, farà $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}::ad:bc$; se $a^2 d=b^2 c$,
farà $\frac{a^2}{b^2}:\frac{c}{d}::a^2 d:b^2 c$; se , quindi finalmente si ha un'
altra, e più diretta dimostrazione dell' ultima proposizione espo-
sta al num. 22. per le frazioni.

Proprietà particolari delle ragioni geometriche composte.

34. **E** Sfendo $\frac{ab}{cd}=\frac{a}{c} \times \frac{b}{d}$; si ha generalmente, che due pro-
dotti sono tra se in ragione composta delle ragioni, che hanno
i fat-

i fattori d'un prodotto ai fattori omologhi dell' altro.

35. In qualunque numero di quantità $a, b, c, d, e, f \dots$ ec.,
si ha $\frac{a}{f}=\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{e} \times \frac{e}{f}$, e generalmente, in qualunque se-
rie di quantità la ragione della prima all' ultima è composta del-
le ragioni delle intermedie.

36. Date a, b ; farà $a^{\frac{m}{n}}$ a $b^{\frac{m}{n}}$ in ragione ^{plicata} $\frac{m}{n}$ di $a:b$.

Se $n=1$, ed m sia successivamente 2; 3; 4; ... ec. farà $\frac{a^2}{b^2}=\frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$,
cioè i quadrati a^2, b^2 sono in ragione duplicata delle sue radici;
così $\frac{a^3}{b^3}=\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$; cioè i cubi a^3, b^3 sono in ragione tripli-
cata delle sue radici... ec. Se $m=1$, ed n sia successivamente

2; 3; 4; ... ec., farà $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{b}$; $\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} \times \frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} \times \frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = \frac{a}{b} \dots$ ec.

cioè le radici sono in ragione sudduplicata, suttriplicata... de'
loro quadrati, cubi... ec. Se m, n sieno amendue, numeri mag-
giori dell' unità, fatto $m=3$, ed $n=2$, $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}$ faranno in ragione

sesequiplicata di $\frac{a}{b}$, o in ragione sudduplicata di $\frac{a^3}{b^3} \dots$ ec.

37. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, farà $\frac{a^m}{b^m}=\frac{c^m}{d^m}$.

Dim. $\frac{a^n}{b^n}$ è in ragione n^{plicata} di $\frac{a}{b}$, o del suo eguale $\frac{c}{d}$; ma $\frac{c}{d}$

è in ragione n^{plicata} di $\frac{c^n}{d^n}$; dunque $\frac{a^n}{b^n}$ è in ragione n^{plicata} del-

la n^{plicata} di $\frac{c^n}{d^n}$; ed essendo la ragione n^{plicata} della n^{plicata}

la stessa ragione d'egualianza, farà $\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}$.

38. Date a, b , si ha

1.^o $a^2 : a b :: a b : b^2$

2.^o $a^3 : a^2 b :: a^2 b : a b^2 :: a b^2 : b^3$

3.^o $a^4 : a^3 b :: a^3 b : a^2 b^2 :: a^2 b^2 : a b^3 :: a b^3 : b^4$.

4.^o ... ec.

La dimostrazione è manifesta, essendo, a cagion d'esempio, nella seconda proposizione

$$\left. \begin{array}{l} a^2 : a^2 b \\ a^2 b : a b^2 \\ a b^2 : b^3 \end{array} \right\} :: a : b.$$

39. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, farà $\frac{ac}{bc} = \frac{bc}{bd}$.

Dim. Dalla data analogia, si ha

$$\left. \begin{array}{l} \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \\ \frac{bc}{bd} = \frac{c}{d} \end{array} \right\}; \text{ dunque } \frac{ac}{bc} = \frac{bc}{bd}.$$

40. Se

40. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ed $\frac{e}{f} = \frac{g}{b}$, farà (moltiplicando insieme le due date equazioni) $\frac{ae}{bf} = \frac{cg}{db}$.

I.

41. Se $a : b :: c : d$
 $b : e :: g : f$
 $e : i :: b : k$
 $i : l :: m : n$
 ... ec.

III.

$a : b :: c : d$
 $c : e :: g : h$
 $g : i :: k : l$
 $k : f :: m : n$
 ... ec.

II.

$a : b :: c : d$
 $e : f :: g : c$
 $b : i :: k : g$
 $m : n :: l : k$
 ... ec.

IV.

$a : b :: c : d$
 $e : d :: f : g$
 $b : g :: i : l$
 $m : l :: n : k$
 ... ec.

Sarà dalla I.^a $a : l :: c g h m : d f k n$
 dalla II.^a $a e h m : b f i n :: l : d$
 dalla III.^a $a : b e i f :: m : d b l n$
 dalla IV.^a $a c h m : b :: c f i n : k$

Tutto è evidente; essendo, per esempio, nella prima serie $\frac{a b e i}{b e i i} = \frac{c g h m}{d f k n}$; e riducendo a minimi termini la prima frazio-

ne, si ha $\frac{a}{l} = \frac{c g h m}{d f k n}$. Cioè in generale ne' termini delle Ana-

logie formate dalla moltiplicazione de' termini omologhi di più Analogie date, si potrà tante volte omettere qualche termine delle Analogie componenti, quante egli serve d'antecedente, e di conseguente nelle prime loro ragioni, o d'antecedente, e di conseguente nelle seconde ragioni, o di antecedente, o di conseguente in amendue... ec.

42. I

42. I due teoremi de' num. 34. 35. appartengono alle ragioni composte di ragioni qualunque; gli altri, che seguono, appartengono alle ragioni composte di ragioni eguali. Infiniti sono i problemi, che col mezzo degli esposti teoremi si sciolgono per le ragioni composte d'amendue i generi. Sono troppo manifesti que', che riguardano le ragioni composte di ragioni eguali, come sarebbe; trovare una ragione duplicata, triplicata, *n*^{plicata} d'una data ragione; trovare una ragione sudduplicata, suttripli-
cata, su *n*^{plicata} d'una data ragione... ec. Si noti principalmente la proposizione del num. 38. Serve essa per conoscere il numero de' medj razionali, che si possono inferire tralle potenze qualunque di due quantità; anzi con quelle formole restano questi agevolmente determinati. Tra' quadrati di *a*, *b*, si può inferire un solo medio continuamente proporzionale, ed è *ab*; tra i cubi di *a*, *b* se ne possono inferire due, e sono *a*²*b*, *ab*²; tra... ec. E' facile il vedere, che le proposte formole, e le altre, che verrebbero dopo non sono, che i termini delle potenze del binomio *a* + *b*, ommessi i segni, che gli congiungono, ed i coefficienti di ciascun termine (Tav. II.^a). La potenza quarta di *a* + *b* è *a*⁴ + 4 *a*³*b* + 6 *a*²*b*² + 4 *a**b*³ + *b*⁴; ommettendo i segni, ed i coefficienti, si ha *a*⁴, *a*³*b*, *a*²*b*², *a**b*³, *b*⁴; cioè tra *a*⁴, e *b*⁴ si possono inferire tre medj proporzionali, e sono *a*³*b*, *a*²*b*², *a**b*³; e tralle potenze *m* di *a*, *b* si può inferire un numero *m* - 1 de' medj proporzionali, ed il termine (*m* - 1)^{esimo} della formola di qualche potenza di *a* + *b* spogliato del segno, e del coefficiente, è l'*n*^{esimo} de' medj, che si possono inferire tra *a*^{*m*-1}, e *b*^{*m*-1}. Qui si parla sempre de' medj proporzionali; che sono razionali; parlando assolutamente, tra due quantità, qualunque esse sieno, si possono inferire infiniti medj proporzionali, come vedremo. Quanto ai primi due teoremi sulle ragioni composte di ragioni qualunque, basti, per vederne la fecondità, la soluzione de' seguenti cinque problemi.

43. Data

43. Data qualunque ragione $\frac{a}{f}$, formarne una ragione comunque composta, ed eguale alla data.

Tra *a*, *f* si concepisca qualunque numero d'intermedie *b*, *c*, *d*, *e*;

si avrà $\frac{a}{f} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{e} \times \frac{e}{f}$ (num. 35.)

44. Dato qualunque numero di ragioni componenti, formarne una ragione composta.

E' manifesto che il prodotto delle date componenti farà la ragione cercata: Ma avvi un altro metodo più elegante, e più utile in tutto il calcolo, e nella geometria:

1.^o Se sien due le ragioni date $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, si faccia *a* : *b* :: *d* : $\frac{bd}{a} = p$; farà $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{p}$.

2.^o Se sieno date tre ragioni componenti $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$; componendo le prime due $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{p}$, e farà ridotto il problema a cercare la ragione composta di $\frac{c}{p}$, $\frac{e}{f}$.

3.^o Se vi sia qualunque numero *A* di date ragioni, si cerchi la ragione composta delle prime due; sostituita questa in *A* si avrà una nuova serie *B* di ragioni, che conterrà una ragione meno di *A*, e collo stesso metodo si cambierà la serie *B* in *C*, e *C* in *D*; fino ad avere una sola ragione, che farà la composta delle date *A*.

45. Data la ragione composta $\frac{a}{f}$, e tutte le ragioni componenti meno una, trovare questa ragione incognita.

E'

E' evidente , che dividendo la composta ragione $\frac{a}{f}$ per il prodotto A delle date ragioni componenti , il quoto B farà la ragione cercata .

Altro metodo. 1.º Se la ragione $\frac{a}{f}$ è composta di due ragioni , una delle quali sia $\frac{c}{d}$, si faccia $c:d::a:\frac{ad}{c} = p$; farà $\frac{p}{f}$ l'altra ragione componente ; oppure $d:c::f:\frac{cf}{d} = q$, farà $\frac{a}{q}$ la ragione cercata .

2.º Se la ragione $\frac{a}{f}$ è composta di tre ragioni , due delle quali siano date ; si faccia $\frac{p}{q}$ composta delle due date , e quindi $p:q::a:$

$\frac{aq}{p} = r$, oppure $q:p::f:\frac{pf}{q} = s$, farà $\frac{r}{f}$, o $\frac{a}{s}$ la ragione cercata .

3.º Ed in generale ; qualunque sia il numero delle ragioni componenti , si chiami A la ragione composta delle date , e B la ragione , che si cerca ; si farà sempre nel caso , in cui data la composta AB , ed una delle componenti A , si cerca B .

46. Data la ragione composta $\frac{a}{f}$, ed una delle componenti A , trovare la ragione B composta delle altre .

E' chiaro , che B comunque composta , è una delle componenti di $\frac{a}{f}$; e che perciò si riduce il presente problema al precedente .

47. Variare all' infinito la più semplice espressione d'una ragione comunque composta .

1.º Si può prendere qualunque antecedente delle ragioni componenti per antecedente della ragione equivalente alla data .

Se

Se sien date $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \times \frac{g}{h}$, e si voglia a per antecedente della ragione composta , si faccia $c:d::b:\frac{bd}{c} = p$, ed $e:f::p:\frac{fp}{e} = q$,

indi $g:b::q:\frac{qb}{g} = r$; farà $\frac{a}{r}$ la ragione equivalente alla data .

2.º Si può prendere per conseguente della ragione composta qualunque conseguente b delle ragioni , che compongono la data , e facendo $d:c::a:\frac{ac}{d} = p$; ed $f:e::p:\frac{ep}{f} = q$, e finalmente $b:$

$g::q:\frac{qg}{b} = r$, farà $\frac{r}{b}$ la ragione cercata .

3.º Si può prendere qualunque quantità n per antecedente , o per conseguente della cercata ; si avrà $a:b::n:\frac{bn}{a} = p$; e $c:d::p:$

$\frac{dp}{c} = q$, indi $e:f::q:\frac{fq}{e} = r$; e finalmente $g:b::r:\frac{br}{g} = s$, ed

$\frac{n}{s}$ farà la ragione cercata .

Delle ragioni , e proporzioni aritmetiche .

48. **O**ltre il modo di paragonare una quantità all'altra dello stesso genere per mezzo della divisione , ve n'ha un altro , che si fa colla sottrazione ; quando si cerca la ragione di contenenza d'una quantità in un'altra , quella ragione , come detto è , si chiama ragione geometrica , e quando si cerca la ragione di differenza d'una all'altra quantità , quella ragione si chiama *ragione aritmetica* : e ficcome la proporzione geometrica è un' ugualianza di due ragioni geometriche , così la *proporzione aritmetica* è un' ugualianza di due ragioni aritmetiche ; onde in amendue le proporzioni si può usare lo stesso

M

segno

segno per separare una ragione dall'altra. Per essere più uniformi ne' segni, che separano i termini della ragione aritmetica, pare, che si dovrebbe usare nelle aritmetiche ragioni il segno della sottrazione, siccome nelle geometriche si usa quello della divisione; ma è più in uso il separargli con un sol punto; cui dalla natura delle quistioni s'intenderà non essere segno di moltiplicazione; finalmente, è chiaro, che la ragione, e la proporzione aritmetica così disegnata, si potrà leggere come la geometrica, col noto *sta, come...* Ciò basta per far comprendere cosa sia antecedente, conseguente, termine omologo, analogo... d'una ragione, o proporzione aritmetica.

49. Per le ragioni aritmetiche, si noti. 1.º Che anche in esse si possono considerare le ragioni composte; Si può dire, a cagione d'esempio, che la ragione aritmetica di 15 a 9, è composta delle tre ragioni di 15 a 12, di 6 a 4, e di 10 a 9.

2.º Che nelle ragioni aritmetiche si possono considerare le ragioni doppie, triple..., appunto come nelle geometriche si considerano le duplicate, triplicate... La ragione geometrica di 8 a 2 è duplicata della ragione geometrica di 8 a 4, e del pari la ragione aritmetica di 8 a 2 è doppia della ragione aritmetica di 8 a 4.

50. Per le proporzioni aritmetiche. La proposizione fondamentale si è, che se $a.b = c.d$, farà $a + d = b + c$; e se $a + d = b + c$, farà $a.b = c.d$; cioè, che in quattro termini aritmeticamente proporzionali la somma degli estremi è eguale alla somma de' medj, e se in quattro termini la somma degli estremi è eguale alla somma de' medj, que' quattro termini sono aritmeticamente proporzionali. Tutto è evidente; avendosi dalla definizione, che se $a.b = c.d$, farà $a - b = c - d$, e trasportando il b , ed il d , farà $a + d = b + c$; e se $a + d = b + c$, trasportando il b , ed il d , farà $a - b = c - d$, donde $a.b = c.d$.

51. Quindi nella proporzione aritmetica continua la somma degli estremi è eguale al doppio di quel di mezzo; e se in tre

ter-

termini, la somma degli estremi è eguale al doppio di quel di mezzo, que' tre termini sono in aritmetica proporzione continua. Ciò è evidente dalla dimostrazione precedente, e dalla trasformazione della precedente equazione; Si faccia $b = c$, farà $a + d = 2b = 2c$, e se $a + d = 2c$, farà $a - c = c - d$, cioè $a.c = c.d$.

52. Si noti sulle proporzioni aritmetiche, che si possono in esse usare que' modi d'argomentare, che si sono esposti al n. 13. per le proporzioni geometriche. Se $a.b = c.d$, farà alternando $a.c = b.d$... ec. Allo stesso modo si possono applicare alle ragioni aritmetiche ineguali la proprietà delle ineguali ragioni geometriche, o semplici, o composte.

53. Quindi si ha la soluzione di tutti i problemi, che dipendono dalle proporzioni aritmetiche. Dati tre termini d'una proporzione aritmetica discreta, trovare il quarto; dati due termini d'una proporzione aritmetica continua, trovare il terzo... ec. Nella proporzione discreta, la somma de' termini non analoghi meno il dato termine analogo al cercato è eguale al termine cercato; nella proporzione continua la metà della somma de' termini estremi è eguale al termine di mezzo; il doppio del termine di mezzo meno uno degli estremi è eguale all'altro estremo... ec.

Delle proporzioni armoniche, e contro-armoniche.

54. SE tre date quantità, o piuttosto numeri, a, b, c siano così disposte, che la prima sta alla terza, geometricamente come la differenza tralla prima, e la seconda, sta alla differenza tralla seconda, e la terza, ossia, che $a:c::a-b:b-c$, quelle tre quantità sono in proporzione *armonica continua*. Se quattro quantità a, b, c, d siano tali, che $a:d::a-b:c-d$, quelle quattro quantità sono in proporzione *armonica discreta*. Se tre quantità a, b, c siano tali, che $c:a::a-b:b:$

M 2

b:

$b:b-c$, o se quattro quantità a, b, c, d sieno tali, che $d:a::a-b:c-d$, quelle quantità sono in proporzione *contro-armonica*, o continua, o discreta.

55. L'uso principale di queste analogie, è di trovare uno de' termini della proporzione armonica, o contro-armonica, di cui sieno dati gli altri. Moltiplicando gli estremi, ed i medj di ciascuna delle quattro precedenti analogie, e liberando coi metodi noti ciascuna lettera, si ha

1.º Per le proporzioni armoniche continue

$$a = \frac{bc}{2c-b}$$

$$b = \frac{2ac}{a+c}$$

$$c = \frac{ab}{2a-b}$$

2.º Per le proporzioni armoniche discrete

$$a = \frac{bd}{2d-c}$$

$$b = \frac{(2d-c)a}{d}$$

$$c = \frac{(2a-b)d}{a}$$

$$d = \frac{ac}{2a-b}$$

3.º Per le proporzioni contro-armoniche continue

$$a = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{(b-c)c + \frac{1}{4}b^2}$$

$$b = \frac{a^2 + c^2}{a + c}$$

$$c = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{(b-a)a + \frac{1}{4}b^2}$$

4.º Per

4.º Per le proporzioni contro-armoniche discrete

$$a = \frac{1}{2}b + \sqrt{(c-d)d + \frac{1}{4}b^2}$$

$$b = \frac{(d-c)c}{a} - a$$

$$c = \frac{(a-b)a}{d} + d$$

$$d = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{(b-a)a + \frac{1}{4}c^2}$$

56. Paragonando ciascun valore de' termini d'una proporzione armonica, o contro-armonica, col valore de' termini d'una proporzione aritmetica, si scopriranno molte eleganti proprietà comuni a questi due generi di proporzioni. A cagione d'esempio, per le proporzioni armoniche continue. 1.º Se a, b, c siano in proporzione aritmetica continua, faranno ab, ac, bc in continua proporzione armonica; dacchè, se $a.b = b.c$, farà $a+c = 2b$, e moltiplicando quest'equazione per abc , si ha $a^2bc + abc^2 = 2ab^2c$, ossia $a^2bc - ab^2c = ab^2c - abc^2$; cioè $ab(ac - bc) = bc(ab - ac)$; donde $ab:bc::ab-ac:ac-bc$. 2.º Se si divida una stessa quantità per altre quantità, che siano in continua proporzione armonica, i quozienti faranno in continua proporzione aritmetica; dacchè, se a, b, c sono in continua proporzione armonica, farà $b = \frac{2ac}{a+c}$; dunque dividendo

qualunque quantità d per a, b, c , ossia per $a, \frac{2ac}{a+c}, c$, si avrà

$$\frac{d}{a}, \frac{ad+dc}{2ac}, \frac{d}{c}, \text{ e } 2\frac{(ad+dc)}{2ac} = \frac{d}{a} + \frac{d}{c}.$$

3.º Allo stesso modo si dimostra, che dividendo una quantità per altre, che siano in continua proporzione aritmetica, i quozienti faranno in continua proporzione armonica, donde si ri-

cava

cava, che invertendo i termini di una delle proporzioni armonica, ed aritmetica, col formare frazioni, che abbiano l'unità per numeratore, ed i detti termini per denominatore, l'una si trasforma nell'altra.



CAPO

CAPO SECONDO.

Delle progressioni Geometriche, ed Aritmetiche.



Progressioni Geometriche.

57. *Progressione geometrica*, significa una serie di termini in continua proporzione geometrica; si nota all'istesso modo, come la proporzione continua, oppure col segno \therefore mesole verso la sinistra, con un punto di separazione d'un termine dall'altro. Già si vede, che ciascun termine della progressione geometrica fuori del primo, è conseguente, e che ciascuno, fuori dell'ultimo, è antecedente, e che chiamando s la somma di tutti i termini, b il primo, t l'ultimo termine; Sarà $s - b$ la somma di tutti i conseguenti, ed $s - t$ la somma di tutti gli antecedenti termini della progressione. Convien distinguere la progressione geometrica *ascendente*, dalla *descendente*; in quella i termini vanno successivamente crescendo da sinistra a destra, ed in questa vanno sempre scemando; nella prima si chiama *ragione comune* della progressione l'esponente della ragione d'un termine qualunque diviso per quello, che lo precede verso la sinistra; la *ragione comune* della seconda progressione, è l'esponente della ragione d'un termine qualunque diviso, per quello, che gli vien dopo verso la destra. Noi parleremo solamente della progressione ascendente, essendo facile l'applicare le proprietà di questa progressione alla descendente, o col rovesciar tutti i termini della progressione, o col cambiare alcuni segni nelle formule, che anderemo esponendo.

58. Prima proposizione fondamentale. Se a è la ragione comune della progressione, ed m il numero, che esprime il sito, che occupa nella progressione un certo termine t , o (che è lo stesso)

stesso) se m esprime il numero de' termini della progressione, sarà $t = b a^{m-1}$.

Dim. Nella progressione $\therefore b.c.d.e.\dots t$, si ha $\frac{c}{b} = a$, cioè $c = ab$; ed essendo $b:c::c:d$, ossia $b:ab::ab:d$, sarà $d = a^2 b$; così pure dall' analogia $c:d::d:e$, ossia $ab:a^2 b::a^2 b:e$, sarà $e = a^3 b$; e così nel resto; disponendo in ordine i valori di ciascun termine, si ha

il secondo.... $c = b a^1$
 il terzo..... $d = b a^2$
 il quarto..... $e = b a^3$
 il m^{esimo} $t = b a^{m-1}$.

59. Seconda proposizione fondamentale. In qualunque progressione geometrica la somma degli antecedenti sta alla somma de' conseguenti, come qualunque antecedente b' sta al suo conseguente c' ; cioè $s-t:s-b::b':c'$.

Dim. Per la natura della progressione, si ha $\frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \dots$ ec.;

dunque (num. 18.) $\frac{b+c+d+\dots ec.}{c+d+e+\dots ec.} = \frac{d}{e} = \frac{c}{d} = \dots = \frac{b}{c}$.

60. Dalla prima proposizione fondamentale si hanno le seguenti sei proposizioni. 1.^a Dato il primo termine b , e la ragione comune a d'una progressione geometrica, si possono trovare tutti gli altri, o qualunque degli altri termini della medesima.

La formola $t = b a^{m-1}$, rappresenta ciascun termine m^{esimo} della progressione; onde se si voglia in particolare un termine d'una tale determinata classe, o sito, si faccia m eguale al numero, che lo indica; se si vogliono successivamente tutti i termini della progressione, si faccia successivamente m eguale ad 1, 2, 3, 4, ... ec.

61. 2.^a proposizione. Qualunque progressione geometrica, che

che incomincia da b , ed ha a per ragione comune, è rappresentabile per $\therefore b.ba.ba^2.ba^3\dots ec.$

62. 3.^a Dato il primo termine b , l'ultimo t , e la ragione comune a , si ha il numero m de' termini inclusivamente l'ultimo; e dato il primo termine b , l'ultimo termine t , ed il numero de' termini m , si ha la ragione comune a .

Dacchè 1.^o si moltiplichi per $\frac{a}{b}$ ciascun membro dell'equazione $t = b a^{m-1}$; si ha $\frac{t a}{b} = a^m$: Si alzi a alla potenza prima,

seconda, terza, ... fino ad avere un numero eguale a $\frac{t a}{b}$; l'esponente di questa potenza sarà il valore di m .

2.^o Si divida l'equazione medesima per b ; si ha $\frac{t}{b} = a^{m-1}$, ed

estraendo la radice $m-1$; si ha $a = \sqrt[m-1]{\frac{t}{b}}$.

63. 4.^a Se r è il numero de' termini interposti tra due qualunque dati termini d'una progressione geometrica, il termine maggiore, sta al minore in ragione $(r+1)^{\text{plicata}}$ della ragione comune.

Così $\frac{b a^2}{b} = a^2$; $\frac{b a^3}{b} = a^3$ ec., cioè, se tra i due termini dati se ne è ommesso uno, il maggiore sta al minore in ragione duplicata di a ; se se ne sono ommessi due, il maggiore sta al minore in ragione triplicata... ec.; dacchè ciascuna di queste ragioni è composta d'un numero $r+1$ di eguali ragioni intermedie.

64. 5.^a Se $b a^r$, $b a^s$ siano termini della progressione geometrica, distanti l'uno dall'altro $r-s$, e $b a^p$, $b a^{p+s}$ siano due altri termini qualunque tra se vicini, sarà $b a^r : b a^s :: b^{r-s} a^{p(r-s)} : b^{r-s} a^{(p+s)(r-s)}$.

N

Dac-

Dacchè l'esponente delle due ragioni è sempre a^{r-1} . Così, per esempio, il primo termine d'una progressione geometrica sta al terzo, come il quadrato del primo sta al quadrato del secondo termine; il primo termine sta al quarto, come il cubo del primo sta al cubo del secondo; il terzo sta al nono, come la sesta potenza di qualunque antecedente, sta alla sesta potenza del suo conseguente . . . ec.

65. 6.^a Tra due quantità b, t trovare un numero r di medj geometricamente proporzionali.

E' evidente, che se si troverà il primo de' cercati medj proporzionali, si troveranno, per il num. 58., tutti gli altri: Sia adunque x il primo de' medj cercati; Sarà per il num. precedente $s:b::x^{r+1}:b^{r+1}$; dunque 1.^o $xb^{r+1} = bx^{r+1}$

$$2.^o \quad t b^r = x^{r+1}$$

$$3.^o \quad \sqrt[r+1]{t b^r} = x$$

66. Dalla seconda proposizione fondamentale si ha; 1.^o, dividendo, $c' - b' : b' :: t - b : s - t$; cioè in una progressione geometrica qualunque termine meno il precedente sta al precedente, come l'ultimo meno il primo sta alla somma di queglii, che precedon l'ultimo.

67. 2.^o E se $c' = n b'$, farà $n b' - b' : b' :: t - b : s - t$; cioè $(n - 1) b' : b' :: t - b : s - t$; donde $t - b = \frac{(n - 1) b' (s - t)}{b'}$

$= (n - 1)(s - t)$; cioè, se in una progressione geometrica il secondo termine sia $n^{p/a}$ del primo (o come altri dicono più acconciamente, se regni nella progressione la ragione $n^{p/a}$); la differenza de' termini estremi farà $(n - 1)^{p/a}$ della somma de' termini, che precedon l'ultimo.

68. 3.^o Dati il primo, e l'ultimo termine, con due altri termini qualunque tra se vicini; oppure, data la ragion comune,

ne, ed il primo, e l'ultimo termine; o dato il numero de' termini, il primo termine, e la ragion comune d'una progressione geometrica; o finalmente dato il primo, e l'ultimo termine, ed il numero de' termini; si ha la somma di tutti i termini; cioè

$$1.^o \quad s = \frac{c' t - b' b}{c' - b'}$$

$$2.^o \quad s = \frac{a t - b}{a - 1}$$

$$3.^o \quad s = b \frac{a^m - 1}{a - 1}$$

$$4.^o \quad s = \frac{\frac{t^m}{t^{m-1}} - \frac{b^m}{b^{m-1}}}{\frac{1}{t^{m-1}} - \frac{1}{b^{m-1}}}$$

Dacchè 1.^o moltiplicando gli estremi, ed i medj dell' analogia,

si ha $s(c' - b') = c' t - b' b$, donde $s = \frac{c' t - b' b}{c' - b'}$.

2.^o Se b', c' fossero i primi due termini b, c della progressione, cioè fossero $b, b a$, farebbe $s = \frac{b a t - b^2}{b a - b} = \frac{a t - b}{a - 1}$.

3.^o Sostituendo invece di t il suo valore $b a^{m-1}$, farebbe $s = \frac{b a^{m-1} a - b}{a - 1} = b \frac{a^m - 1}{a - 1}$.

Finalmente 4.^o per essere $a = \sqrt[m-1]{\frac{t}{b}} = \frac{t^{\frac{1}{m-1}}}{b^{\frac{1}{m-1}}}$

$$\text{Si ha } a - 1 = \frac{a^m - 1}{a^{m-1} - 1} = \frac{a^m - 1}{a^{m-1} - 1}$$

$$a^m = \frac{a^m - 1}{\frac{1}{a^{m-1}}}$$

$$a^m - 1 = \frac{a^m - 1}{\frac{1}{a^{m-1}}}$$

$$\text{donde } s = b \frac{a^m - 1}{a - 1} = \frac{a^m - 1}{\frac{1}{a^{m-1}}}$$

69. 4.º Dividendo l'equazione $s = b \frac{a^m - 1}{a - 1}$ per $\frac{a^m - 1}{a - 1}$, si ha $b = s \frac{a - 1}{a^m - 1}$, cioè, data la somma, il numero de' termini,

e la ragion comune, si ha il primo termine della progressione.

70. 5.º Sostituendo nella formola $t = b a^{m-1}$, questo valore di b , si ha l'espressione generale di qualunque termine, data la somma, il numero de' termini, e la ragion comune, cioè

$$t = s \frac{a^m - a^{m-1}}{a^m - 1}$$

71. 6.º Si può avere la ragion comune della progressione, data la somma degli antecedenti, e de' conseguenti; dacchè $b : ba :: s - t : s - b$, donde $bs - b^2 = bas - bat$, ossia $s - b = as - at = a(s - t)$; cioè $a = \frac{s - b}{s - t}$.

72. Le

72. Le premesse due proposizioni fondamentali, ed i corollarij da esse dedotti sono fecondissimi d'altre proposizioni, che ciascuno, confrontando ciascuna formola con tutte le altre, potrà da se dedurre senza pena. Si ha a cagione d'esempio

$$b = s + at - as = s + (t - s)a$$

$$t = \frac{as + b - s}{a} = \frac{(a - 1)s + b}{a}$$

e dal num. 65. si può compire una progressione geometrica, di cui non sia dato, che il primo, ed un altro termine qualunque, col numero de' termini intermedj; basta fare r eguale al numero degli intermedj, e si avrà x secondo termine della progressione; e fatto $m = r + 2, \dots$ si determinerà successivamente la formola $t = b a^{m-1}$.

Delle progressioni Aritmetiche.

73. *Progressione aritmetica*, significa una serie di termini in continua proporzione aritmetica: Si nota allo stesso modo come la proporzione aritmetica, o col segno \doteq messo verso la sinistra, ed un punto di separazione tra un termine, e l'altro. Anche la progressione aritmetica può essere ascendente, o discendente; tratterò solo dell' ascendente. Nell' articolo precedente mi sono steso più forse del bisogno a svolgere con parole le formole algebriche, che danno le dimostrazioni de' teoremi, e le soluzioni de' problemi sulle progressioni geometriche; ho giudicato di doverlo fare, per avvezzare il lettore anche in questa materia delle progressioni a penetrare lo stato, e le condizioni della quistione col solo contemplare attentamente le formole: Non sarà uopo di tanto in quest' articolo, nel quale ciascuno potrà dedurre (come detto è per le progressioni geometriche) delle nuove formole, che qui ometto per essere, o troppo facili, o meno necessarie.

74. Pro-

74. Proposizione fondamentale. Se b è il primo termine, a la differenza, o la ragione comune, m il numero, che esprime il sito d'un termine qualunque, o il numero de' termini della progressione, fino ad esso inclusivamente, sarà $t = b + (m-1)a$. Dim. Nella progressione aritmetica $\ddot{\cdot} b.c.d.e.f.\dots t$; si ha $c-b=a$, cioè $c=b+a$, ed essendo $b.c=c.d$, ossia $b.b+a = b+a.d$, sarà $d=b+2a$. ec.; cioè il primo termine essendo b

il secondo è $b+a$

il terzo è $b+2a$

il m^{esimo} è $b+(m-1)a$

75. Seconda proposizione fondamentale. Se t è l'ultimo termine, ed s la somma di tutti i termini della progressione aritmetica, sarà 1.º $t-b=ma-a$

$$2.º \quad 2s = mb + mt$$

La prima formola è evidente, trasponendo il b della formola del num. 74, la seconda si dimostra così: Nella progressione aritmetica $\ddot{\cdot} b.c.d.e.k.t$, per la definizione si ha $b.c=k.t$, $b.d=e.t$

dunque $b+t=c+k$

$b+t=d+e$; cioè $2(b+t) = (c+k) + (d+e)$, e $3(b+t)=s$, donde $6(b+t)=2s$; ma 6 è il numero m de' termini della progressione, dunque $m(b+t)=2s$.

76. Dalla formola del num. 74.; 1.º Dato il primo termine b della progressione aritmetica, e la differenza comune a , si possono trovare successivamente tutti gli altri termini, o qualunque termine della progressione.

Si faccia nella formola di t , la lettera m eguale all' esponente del sito, che deve occupare il termine cercato; o se si vogliono successivamente tutti gli altri termini della progressione dopo b , si faccia m successivamente eguale a 2. 3. 4. 5... ec.

77. 2.º Qualunque progressione aritmetica, che incomincia da

da b , ed ha a per differenza comune, si può rappresentare da $\ddot{\cdot} b.b+a.b+2a.b+3a\dots$ ec.

78. 3.º Tra due dati termini t, b trovare un numero r di medj t aritmeticamente proporzionali.

Si divida la differenza $t-b$ per $r+1$; il quoziente sarà l' a della progressione, con cui, per il num. 74., si troveranno tutti i termini della medesima. Dacchè se si cerca un numero r di termini intermedj, compiuta che sia la progressione, si dovranno avere $r+1$ differenze, e tutte tra se eguali, la cui somma deve equivalere a $t-b$; dunque ciascuna di queste sarà $\frac{t-b}{r+1}$.

79. Colle formole del num. 75. si sciolgono tutti i problemi, che appartengono alle progressioni aritmetiche. In ciascuna di quelle formole si contengono quattro lettere; liberando adunque co' noti metodi ciascuna di queste, si avrà il suo valore, colle altre tre; cioè in tutto si avranno otto formole per gli m, a, b, t, s . Sostituendo nella seconda formola il valore di t , di a , e di m presi dalla prima, si avranno tre altre formole di quattro lettere per ciascuna, da ciascuna di queste si dedurranno, come prima, quattro nuove formole, cioè in tutto dodici formole, che colle prime otto daranno venti formole, che comprendono tutti i casi possibili delle progressioni aritmetiche. Il problema generale, che comprende tutti questi venti casi è *dati i valori di tre lettere m, a, b, t, s , trovare il valore di ciascuna delle altre due.*

80. Facendo il calcolo accennato nel num. precedente, si ha

Prima formola

$$t-b=ma-a$$

$$\text{I. } b=t-(m-1)a$$

$$\text{II. } t=b+(m-1)a$$

$$\text{III. } a=\frac{t-b}{m-1}$$

$$\text{IV. } m=1+\frac{t-b}{a}$$

Seconda formola

$$2s=mb+mt$$

$$\text{I. } b=\frac{2s}{m}-t$$

$$\text{II. } t=\frac{2s}{m}-b$$

$$\text{III. } s=\frac{m}{2}(b+t)$$

$$\text{IV. } m=\frac{2s}{b+t}$$

Seconda formola,
trasformata col valore di t prefo dalla prima

$$2s = 2mb + m^2 a - ma$$

$$\text{I. } b = \frac{1}{m}s - \frac{m-1}{2}a$$

$$\text{II. } a = \frac{2(s-mb)}{m \cdot m - 1}$$

$$\text{III. } s = mb + \frac{m \cdot m - 1}{2}a$$

$$\text{IV. } m = \frac{1}{2} - \frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \frac{2s-b}{a} + \frac{1}{4}}$$

Seconda formola,
trasformata col valore di m prefo dalla prima

$$2s = b + t + \frac{t^2 - b^2}{a}$$

$$\text{I. } b = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(t+a)t - (2s - \frac{1}{4}a)a}$$

$$\text{II. } t = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(b-a)b + (2s + \frac{1}{4}a)a}$$

$$\text{III. } a = \frac{t^2 - b^2}{2s - b - t}$$

$$\text{IV. } s = \frac{b-t}{2} + \frac{t^2 - b^2}{2a}$$

Seconda formola,
trasformata col valore di a prefo dalla prima

$$2s = 2mt - m^2 a + ma$$

I.

$$\text{I. } t = \frac{1}{m}s + \frac{m-1}{2}a$$

$$\text{II. } a = \frac{2(mt-s)}{m \cdot m - 1}$$

$$\text{III. } s = mt - \frac{m \cdot m - 1}{2}a$$

$$\text{IV. } m = \frac{1}{2} + \frac{t}{a} \pm \sqrt{\frac{t^2}{a^2} - \frac{2s+t}{a} + \frac{1}{4}}$$

81. Combinando insieme queste formole si trovano quattro valori per ciascuna delle cinque lettere m, a, b, t, s

$$\text{I. } m = 1 + \frac{t-b}{a} = \frac{2s}{b+t}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \frac{2s-b}{a} + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{t}{a} \pm \sqrt{\frac{t^2}{a^2} - \frac{2s+t}{a} + \frac{1}{4}}$$

$$\text{II. } a = \frac{t-b}{m-1} = 2 \frac{s-mb}{m \cdot m - 1}$$

$$= \frac{t^2 - b^2}{2s - b - t} = 2 \frac{mt - s}{m \cdot m - 1}$$

$$\text{III. } b = t - (m-1)a = \frac{2s}{m} - t = \frac{1}{m}s - \frac{m-1}{2}a$$

$$= \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(t+a)t - (2s - \frac{1}{4}a)a}$$

O

IV.

$$\text{IV. } t = b + (m-1)a = \frac{2s}{m} - b = \frac{1}{m}s + \frac{m-1}{2}a$$

$$= -\frac{1}{2}a + \sqrt{(b+a)b + (2s + \frac{1}{4}a)a}$$

$$\text{V. } s = \frac{m}{2}(b+t) = mb + \frac{m(m-1)}{2}a$$

$$= \frac{b-t}{2} + \frac{t^2 - b^2}{2a} = mt - \frac{m(m-1)}{2}a.$$

*Paragone delle due progressioni, Geometrica,
ed Aritmetica.*

82. **P** Aragonando insieme le formole dedotte dalle proprietà delle proporzioni, e progressioni geometriche, ed aritmetiche, si vede 1.º Che l'addizione, e la sottrazione nelle proporzioni, e progressioni aritmetiche, fanno ciò, che nelle proporzioni, e progressioni geometriche si ottiene colla moltiplicazione, e colla divisione.

2.º Che nelle proporzioni, e progressioni aritmetiche si fa colla moltiplicazione, e colla divisione cioè nelle proporzioni, e progressioni geometriche si fa colla formazione, e colla risoluzione delle potenze.

3.º Che la differenza, o la ragione comune de' termini d'una proporzione, e progressione aritmetica tiene luogo della ragione comune nella geometrica.

A cagione d'esempio, per trovare l'ultimo termine t d'una progressione aritmetica, dato il primo termine b , la differenza comune a , ed il numero m de' termini, si moltiplica la differenza comune a col numero de' termini $m-1$, e si aggiunge al prodotto il primo termine b ; e nella progressione geometrica, si ha il t alzando alla potenza $m-1$ la ragione comune a , e moltiplicando a^{m-1} per il primo termine b .

83. Tutte

83. Tutte le proprietà delle proporzioni geometriche, ed aritmetiche si potevano dedurre dalla espressione de' conseguenti per mezzo degli antecedenti, e della ragione comune fatta eguale ad a ; invece di $a:b::c:d$, e di $a.b::c.d$ si poteva prendere $a:ab::c:ac$, e $b.b+a::c.c+a$; o, unendo in una queste due espressioni, fare $b; b \times a::c; c \times a$. Non abbiamo scelta questa strada, che pure sembra più semplice, per dare luogo agli artificj analitici, e l'accenniamo qui per dare materia di calcolo a chi vorrà contemplare la teoria delle proporzioni anche sotto quest' aspetto.

84. Nelle progressioni. 1.º Non s'impiegano più di due lettere diverse, b, a , varie volte a se stesse aggiunte, o moltiplicate insieme; la progressione aritmetica si riduce sempre a $b, b+a, b+2a, b+3a \dots$ ec., e la geometrica a $b, ba, ba^2, ba^3 \dots$ ec.

2.º I coefficienti di a nella progressione aritmetica sono gli stessi, che gli esponenti di a nella geometrica, termine per termine, ed oltre a ciò formano la serie naturale $1.2.3.4 \dots$ ec., o se si faccia il primo termine della progressione aritmetica eguale a $b+0a$, e della geometrica ba^0 , formano la serie naturale $0.1.2.3.4 \dots$ ec.

3.º Quindi dato il primo termine b , e la ragione comune a delle due progressioni, si ha un facile compendio per formarle, e continuarle all' infinito. Per la progressione aritmetica basta moltiplicare la ragione, o differenza comune a successivamente per i termini della serie naturale $0.1.2.3 \dots$ ec., ed a ciascun prodotto aggiungere il primo termine b . Per la progressione geometrica basta alzare a successivamente alle potenze espresse dalla serie naturale $0.1.2.3.4 \dots$ ec., e moltiplicare di mano in mano queste potenze per b .

4.º Nella progressione aritmetica, può supporfi b eguale a zero, non così nella geometrica; dacchè fatto $b=0$ in quella si avrebbe

O 2

bc

be tuttavia la progressione $\frac{1}{a} \cdot a \cdot 2a \cdot 3a \dots$ ec., ed in questa si avrebbe una serie di zeri.

5.º Nella progressione aritmetica può supporfi $a=1$, non così nella geometrica; e nè in quella, nè in questa può a essere eguale a zero. Se $a=1$, si ha $\frac{1}{a} \cdot b \cdot b+1 \cdot b+2 \dots$ ec., se $a=0$, si ha $b \cdot b \cdot b \dots$ ec., che è una serie di quantità eguali; e nelle progressioni geometriche, se $a=1$, si ha $b \cdot b \cdot b \dots$ ec., serie di quantità eguali, e se $a=0$, si ha una serie di zeri.

6.º Quindi la progressione aritmetica può avere qualche termine eguale a zero, non così la geometrica: nella progressione aritmetica allora solamente vi farà un termine eguale a zero, quando uno de' termini sarà multiplo della ragione comune.

85. Infinite sono le osservazioni di simil genere, che si possono fare sulle due progressioni; tra tutte però, le più interessanti s'aggirano sulla progressione geometrica, in cui si supponga $b=1$; si ha $\frac{1}{a} \cdot a^0 \cdot a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \dots$ ec., che è la serie delle potenze di a . Su quella serie si noti. 1.º Che se preso a^0 per primo termine della progressione, il secondo non fosse a^1 , ma $\frac{1}{a^1} = a^{-1}$, si avrebbe $\frac{1}{a} \cdot a^0 \cdot a^{-1} \cdot a^{-2} \cdot a^{-3} \dots$ ec.

2.º Che si possono ordinare queste due progressioni, di modo che ne compongano una sola; si avrà

$$\text{ec.} \dots a^{-4} \cdot a^{-3} \cdot a^{-2} \cdot a^{-1} \cdot a^0 \cdot a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 \dots \text{ec.}$$

3.º Che in questa nuova progressione, il termine di mezzo a^0 è il limite comune donde partono le due progressioni, una verso la destra, l'altra verso la sinistra; la ragione d'un termine qualunque al suo vicino verso la destra è $\frac{1}{a}$, e gli esponenti partendo del limite comune formano la serie de' numeri naturali, ma andando verso la destra ciascun termine di questa serie ha il segno $+$, andando verso la sinistra, hanno il segno $-$.

4.º Che

4.º Che quindi la serie, che sta alla sinistra di a^0 è inversa di quella, che vi sta a destra: il secondo termine verso la destra dopo a^0 è a^1 , ed il secondo termine dopo a^0 verso la sinistra è $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$: il terzo termine... ec.

86. Quindi. 1.º Nella progressione delle potenze di a d'esponente positivo la seconda potenza di a occupa il secondo sito, o la seconda classe dopo a^0 ; e generalmente, la potenza m^{esima} sta alla classe $(m+1)^{\text{esimo}}$, incominciando da a^0 ; ed essendo il termine $(m+1)^{\text{esimo}}$ d'una progressione geometrica affatto lo stesso del $(m+1)^{\text{esimo}}$ continuamente proporzionale dopo il primo, ed il secondo termine, la potenza m di a è la $(m+1)^{\text{esima}}$ continuamente proporzionale all'unità, ed al dato a . Ciò vale ancora per le potenze d'esponente negativo.

2.º Collo stesso discorso si vede, che nella serie delle potenze di a , il termine a^1 , che è radice seconda di a^2 , è mezzano proporzionale tra a^0 , ed a^2 , e che generalmente a^1 , che è radice m^{esima} di a^m , è la prima delle $m-1$ proporzionali tra a^0 , ed a^m ; cioè, che la radice qualunque d'una potenza d'esponente positivo è la prima di tante medie proporzionali tra l'unità, e la potenza data, quante sono unità (una meno) nell'esponente della radice cercata.

87. Quindi ancora; 1.º Cercare una potenza d'intero esponente dato di una data quantità a , è lo stesso, che supporre già formata una progressione geometrica, il primo termine della quale sia l'unità, ed il secondo sia la data quantità a , e cercare il termine di questa progressione, che occupa il sito indicato dall'esponente della potenza cercata, dopo l'unità non compresa; o, a dire più corto, cercare la potenza m d'una quantità a è lo stesso, che cercare la $(m+1)^{\text{esima}}$ continuamente proporzionale ad a^0 , ed a .

2.º Cercare una radice d'esponente intero d'una data potenza, è lo

è lo stesso, che supporre già formata una progressione geometrica, che incominci dall'unità, di cui sia dato un termine qualunque, ed il sito (indicato dall'esponente), che egli occupa nella medesima, e cercare il primo di tanti medj proporzionali tra l'unità, ed il dato termine, quante sono unità (meno una) nell'esponente dato; o, a dire più in breve, cercare la radice m d'una quantità a è lo stesso, che cercare il primo degli $(m-1)^{esimi}$ medj proporzionali tra a^0 , ed a .

88. Quindi finalmente è manifesto, che tanto le radici delle potenze, quanto le potenze stesse d'una data radice sono termini della progressione delle potenze $\dots a^0 \cdot a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \dots$ ec.; cioè dà una compiuta dichiarazione del chiamarsi dagli Analisti col nome di potenze anche le volgari radicali quantità.

89. Ciò dichiarasi viemmeglio dalla natura degli esponenti della progressione delle potenze. La diversità di due termini qualunque di questa progressione non ita, che negli esponenti diversi, da cui vengono affetti; sempre a entra ne' termini della progressione, ma sempre con nuovi, e tra se diversi esponenti, e per compire la progressione di due dati termini, o per introdurre tra due dati termini un numero m di medj proporzionali, basta cercare un numero m di medj aritmeticamente proporzionali tra gli esponenti de' medesimi, e mettergli di mano in mano per esponenti di a . Così per inferire un medio proporzionale tra a^0 , ed a^2 , si cerchi un medio aritmeticamente proporzionale r tra zero, e 2; si avrà $r=1$, ed a^1 farà il medio cercato; per inferire tre medj proporzionali tra a^0 , ed a^4 , si cerchino tre medj aritmeticamente proporzionali tra zero, e 4 l'unità; si avrà $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, ed i medj cercati daranno

$a^0 \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot a^1$; e col metodo del num. 65., si avrà

$$a^0 \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[2]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot a^1;$$

onde

$$\text{onde } a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}, a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a}, a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}.$$

90. L'ultima, e la più insigne proprietà delle progressioni delle potenze è dedotta dalle proprietà delle progressioni aritmetiche, e geometriche, ed è, che la somma, o la differenza degli esponenti di due termini qualunque è l'esponente del prodotto, o del quoto de' medesimi, tra se moltiplicati, o divisi. Questa è la proprietà principale de' *logaritmi*, che noi esporremo nel capo seguente, dopo d'aver sciolto il seguente problema.

91. Trovare la ragione, che ha la somma A d'una progressione geometrica, alla somma B d'una progressione aritmetica, posto, che amendue abbiano gl'istessi estremi b , t , e lo stesso numero di termini m .

Si riducano i due valori di A , B a non contenere, che le tre lettere b , t , m . Per la progressione aritmetica si ha (num. 81.) $B = \frac{m}{2}(b+t)$, e per la progressione geometrica si ha (num. 68.)

$$A = \frac{t^{\frac{m}{2}} - b^{\frac{m}{2}}}{t^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{e perciò } A : B :: \frac{t^{\frac{m}{2}} - b^{\frac{m}{2}}}{t^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} : \frac{m}{2}(b+t) ::$$

$$2(t^{\frac{m}{2}} - b^{\frac{m}{2}}) : m(b+t)(t^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}) ::$$

$$2(t^{\frac{m}{2}} - b^{\frac{m}{2}}) : m(t^{\frac{m}{2}} - b^{\frac{m}{2}}) + m(b t^{\frac{1}{2}} - t b^{\frac{1}{2}});$$

e fatto

e fatto $t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}} = p$, e $b t^{\frac{1}{m-1}} - t b^{\frac{1}{m-1}} = q$,

si ha $A:B::2p:mp+mq::2p:m(p+q)$

ossia, $A:B::2 : m + \frac{mq}{p}$.

92. Usando questo metodo non farà necessario cercare separatamente le somme A, B per avere il loro rapporto, anzi non farà necessario, che sia noto alcuno de' termini medj; dati i termini estremi, ed il numero de' termini si ha la ragione cercata, e finalmente trovata la ragione delle somme, e dato l' A , o il B , si ha il B , o l' A senza altri calcoli, fuori de' consueti per liberare un termine d'una data analogia.

93. E' evidente. 1.º Che crescendo t per rapporto a b, m nell' analogia superiore, cresce il p , e la seconda parte $t b^{\frac{1}{m-1}}$ di q ; cioè si scema $\frac{mq}{p}$.

2.º Che crescendo il solo m , cresce $m + \frac{mq}{p}$.

3.º Che l' $m + \frac{mq}{p}$ si aumenta più col crescere di t , che col crescere di m .

4.º Quindi crescendo t , o m , si sminuisce il rapporto di A a B , o, che è lo stesso, cresce il rapporto di B ad A ; ma questi rapporti sminuiscono, e crescono di più col crescere t , che coll' aumentarsi m .

94. Ciò si dichiarerebbe sempre più se prendessimo a considerare le trasformazioni della formola nel caso, in cui una delle t, b, m crescesse all' infinito per rapporto alle altre: queste considerazioni le può fare ognuno da se, essendo il calcolo delle quantità infinite affatto lo stesso del calcolo delle finite; noi

per

per a, b, \dots ec. abbiamo sempre inteso d'esprimere qualunque sorta di quantità, o esse si suppongano finite, o comunque cresciute, o scemate all' infinito. Sulle proporzioni degli assolutamente infiniti, o infinitamente piccoli, o essi vi sieno, o piuttosto conducano ad assurdi, puoi vedere le ingegnose cose, che ha scritte il Fontenelle (Elemens de la Geom. de l'Infini).



CAPO TERZO.

De' Logaritmi.

Natura, e proprietà de' Logaritmi.

95. **T**rovare l'esponente z della potenza, a cui alzando un numero qualunque a , preso ad arbitrio, si abbia un numero eguale ad un dato y .

A questo problema io riduco con Eulero (Tom. 1. c. 6. dell' introduzione all' Analisi degli infiniti) tutta la teoria de' logaritmi; l'esponente indeterminato z si chiama logaritmo del numero dato y , ed il numero assunto a si chiama *base logaritmica*. Questo problema si scioglie col metodo delle medie, e continuamente proporzionali.

96. In tanto si vede dall' equazione fondamentale $a^z = y$, che disegnando colla lettera l il logaritmo di un dato numero y , si ha 1.º $ly = z$, ed alzando ciascun membro della prima equazione alla potenza d'esponente n , e $-n$ qualunque, si ha

$$\begin{aligned} a^{nz} &= y^n \\ a^{-nz} &= y^{-n} \\ \text{dove } ly^n &= nz \\ ly^{-n} &= -nz \end{aligned}$$

2.º Se $lv = x$ farà $a^x = v$

$ly = z$ $a^z = y$, e moltiplicando insieme queste due equazioni, si ha $a^{x+z} = vy$, donde $lv + lz = x + z = lv + ly$, e dividendo una di quelle medesime equazioni per l'altra, si ha $a^{x-z} = \frac{v}{y}$, donde $l\frac{v}{y} = x - z$,

$$\text{cioè } l\frac{v}{y} = lv - ly$$

3.º Fi-

3.º Finalmente, se $y = 1$, farà $a^z = 1$, cioè $z = 0$, e $l1 = 0$.

97. Quindi rappresentandosi coll' y qualunque numero, 1.º non può a essere eguale, o minore dell' unità, dacchè se esso è un' unità, non potrà mai, qualunque sia l'esponente z , averfi un numero maggiore d'un' unità, e se è una frazione, fuori del caso di $z = 0$, farà sempre a^z minore dell' unità.

2.º I logaritmi negativi sono logaritmi delle frazioni; i logaritmi positivi sono logaritmi de' numeri interi.

3.º Non si possono avere logaritmi esatti, se non quando y è una potenza perfetta di a ; gli altri si hanno per approssimazione.

4.º Come si possono assegnare infiniti valori ad a maggiori dell' unità, infiniti altresì possono essere i sistemi de' logaritmi, dipendenti tutti dalle diverse supposizioni del valore di a .

5.º Quel numero, il cui logaritmo è l'unità, serve sempre di base a qualunque sistema; dacchè, se $z = 1$, deve necessariamente essere $a = y$.

6.º Se quattro termini sono in proporzione geometrica, i loro logaritmi sono in proporzione aritmetica, e se una serie di termini è in progressione geometrica, i loro logaritmi sono in progressione aritmetica; dacchè i logaritmi sono esponenti delle potenze di a , o delle radici di y .

98. Da quest'ultima proprietà de' logaritmi hanno tratta alcuni Autori la definizione de' medesimi, dicendo, che i logaritmi sono termini d'una progressione aritmetica, che corrispondono a' termini d'una geometrica progressione. Questa nozione prende i logaritmi in una significazione più astratta, e più generale; ma per l'uso non è uopo di tanto.

99. Si considerino le formole del num. 96. In qualunque sistema de' nostri logaritmi; 1.º $lv + ly = lv + ly$. Con questa formola si cambiano tutte le moltiplicazioni in semplici addizioni: Il prodotto di due numeri è il numero, che corrisponde nelle tavole alla somma de' loro logaritmi.

2.° $l \frac{x}{y} = l x - l y$. Con questa formola si cambiano tutte le divisioni in semplici sottrazioni: *Il quoto di due numeri è il numero, che corrisponde nelle tavole al logaritmo del dividendo sminuito del logaritmo del divisore.*

3.° $l y^{\pm n} = \pm n z$, ossia $l y^{\pm n} = \pm n l y$, per essere $z = l y$.

Con questa formola si cambiano le formazioni di tutte le potenze d'esponente positivo, o negativo, alle volte di numeri assai composti, in semplici moltiplicazioni di numeri piccoli: *La potenza d'esponente dato di un dato numero, è il numero, che corrisponde nelle tavole al logaritmo del dato numero, ma moltiplicato per l'esponente dato.*

4.° $l y^{\pm \frac{1}{s}} = \pm \frac{1}{s} z = \pm \frac{1}{s} l y$ Con questa formola si cambia-

no l'estrazioni delle radici in semplicissime divisioni: *La radice d'esponente dato d'un dato numero, è il numero, che corrisponde nelle tavole al logaritmo del dato numero, ma diviso per l'esponente dato.*

5.° L'uso di queste quattro formole farà comprendere varj compendj nel calcolo; a cagione d'esempio, per moltiplicare un numero intero per una frazione propria, non è necessario cercare prima il logaritmo della frazione, per aggiungerlo al logaritmo del numero intero; basta sottrarre il logaritmo del denominatore della frazione dalla somma de' logaritmi dell'intero, e del numeratore dato; si schiva con ciò una sottrazione, che sempre riesce più difficile dell'addizione; così per dividere un numero intero per una frazione, basta sottrarre il logaritmo del dato numeratore, dalla somma de' logaritmi dell'intero, e del denominatore dato; e così nel resto.

Sarà ora facile il mettere in teoremi le altre formole sui logaritmi, che noi anderemo svolgendo in questo capo.

Me-

Metodi, e compendj di metodi per costruire le tavole de' Logaritmi.

100. **D**ato B per valore della base a , trovare il logaritmo d'un numero qualunque Z .

Sia $Z = 5$, e nell'equazione $a^x = y$ sia $y = 1$, ed $y = 10$; fatto

$$A = 1, \text{ farà } lA = 0$$

$$B = 10 \quad lB = 1$$

cioè Z sta tra A, B . Si cerchi un medio geometricamente proporzionale tra A, B ; si avrà $C = \sqrt{AB}$; cioè C eguale a 10 alzato alla potenza, che ha per esponente un medio aritmeticamente proporzionale tra zero, e l'unità: Per evitare le frazioni in questa, ed in simili determinazioni, si metta dopo i termini A, B , ed lA, lB un egual numero di zeri, per esempio sei, o sette; farà

$$A = 1, \text{ oooooo} \dots lA = 0, \text{ ooooooo}$$

$$B = 10, \text{ oooooo} \dots lB = 1, \text{ ooooooo}$$

$$C = 3, \text{ 162277} \dots lC = 0, \text{ 5000000}$$

Il C trovato non è eguale a Z , e sta Z tra C, B . Si determini allo stesso modo un medio geometricamente proporzionale tra C, B ; si avrà $D = \sqrt{BC}$, cioè 10 alzato ad una potenza, che ha per esponente un medio aritmetico tra lB , e $lC \dots$, e così si proceda successivamente, come nello schema seguente, finchè uno de' medj proporzionali sia Z .

A

$A = 1$, 000000....	$lA = 0$, 0000000	
$B = 10$, 000000....	$lB = 1$, 0000000	Sia
$C = 3$, 162277....	$lC = 0$, 5000000....	$C = \sqrt{AB}$
$D = 5$, 623413....	$lD = 0$, 7500000....	$D = \sqrt{BC}$
$E = 4$, 216964....	$lE = 0$, 6250000....	$E = \sqrt{CD}$
$F = 4$, 869674....	$lF = 0$, 6875000....	$F = \sqrt{DE}$
$G = 5$, 232991....	$lG = 0$, 7187500....	$G = \sqrt{DF}$
$H = 5$, 048065....	$lH = 0$, 7031250....	$H = \sqrt{FG}$
$I = 4$, 958069....	$lI = 0$, 6953125....	$I = \sqrt{FH}$
$K = 5$, 002865....	$lK = 0$, 6992187....	$K = \sqrt{HI}$
$L = 4$, 980416....	$lL = 0$, 6972656....	$L = \sqrt{IK}$
$M = 4$, 991627....	$lM = 0$, 6982421....	$M = \sqrt{KL}$
$N = 4$, 997242....	$lN = 0$, 6987304....	$N = \sqrt{KM}$
$O = 5$, 000052....	$lO = 0$, 6989745....	$O = \sqrt{KN}$
$P = 4$, 998647....	$lP = 0$, 6988525....	$P = \sqrt{NO}$
$Q = 4$, 999350....	$lQ = 0$, 6989:35....	$Q = \sqrt{OP}$
$R = 4$, 999701....	$lR = 0$, 6989:40....	$R = \sqrt{OQ}$
$S = 4$, 999876....	$lS = 0$, 6989592....	$S = \sqrt{OR}$
$T = 4$, 999963....	$lT = 0$, 6989668....	$T = \sqrt{OS}$
$V = 5$, 000008....	$lV = 0$, 6989707....	$V = \sqrt{OT}$
$W = 4$, 999984....	$lW = 0$, 6989687....	$W = \sqrt{TV}$
$X = 4$, 999997....	$lX = 0$, 6989597....	$X = \sqrt{WV}$
$Y = 5$, 000003....	$lY = 0$, 6989702....	$Y = \sqrt{VX}$
$Z = 5$, 000000....	$lZ = 0$, 6989700....	$Z = \sqrt{XY}$

Si ha dunque $l5 = 0,69897$, cioè $10^{0,69897} = 5$.

Allo stesso modo si possono trovare i logaritmi degli altri numeri per qualunque base logaritmica a . Le tavole di Briggs,

e di

e di Ulacquo sono calcolate sulla base 10, e sono oramai le più note, e comuni.

101. Sarebbe intollerabile la noja del calcolo, se si dovestero cercare immediatamente col metodo spiegato i logaritmi di tutti i numeri naturali. Quattro sono gli artificj più comuni per abbreviarne il lavoro;

1.º Di cercare col precedente metodo solamente i logaritmi de' numeri primi, e co le moltiplicazioni di questi logaritmi, per 2, per 3...., per n si avranno i logaritmi delle loro potenze seconde, terze...., n^{esime} .

2.º Di cercare, coll' addizione de' logaritmi de' numeri primi, i logaritmi de' loro composti.

3.º Di cercare, coll' addizione, o sottrazione de' logaritmi di certi altri numeri non primi, i logaritmi de' loro multipli, e summultipli.

4.º Di cercare, co' logaritmi di varj numeri, posti ad eguale intervallo nella serie naturale, i logaritmi de' numeri intermedj. I primi tre compendj sono per se chiari dalle formole dell' articolo precedente: Aggiungendo al logaritmo di 10 quello di $\frac{9}{10}$,

si ha il doppio logaritmo di 3: Sottraendo il logaritmo di 2 dal logaritmo di 10, si ha il logaritmo di 5... ec. Il quarto compendio dipende dal metodo delle interpolazioni, che noi spiegheremo nel secondo libro.

102. Questi, ed altri compendj per formare le tavole de' logaritmi, si applicano facilmente ad altri metodi più universali, presi da principj più elevati del calcolo. Eulero nell' introduzione citata al num. 94, Reyneau nel secondo tomo dell' Analisi dimostrata, ed altri, mostrano in generale, che il logaritmo del numero $1+x$, che rappresenta qualunque numero maggiore, o minore dell' unita, è eguale ad $\frac{1}{k} \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots \text{ec.} \right)$, ed il valore

di

di k dipende dalla base a fatta eguale ad $1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} +$

$$\frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \text{ ec.}$$

103. Tra tutti i sistemi de' logaritmi, due sono i più conosciuti; quello della base $a=10$, che dà i logaritmi chiamati *volgari*, e quello della base

$$a=2, 71828182845904523536028 \dots \text{ ec.},$$

che dà i logaritmi chiamati *iperbolici* dall' esprimersi, che si fa con essi nella geometria sublime, la quadratura dell' iperbole. Nel sistema volgare, il logaritmo di 10 è l'unità, come al num. 100., e nel sistema iperbolico il logaritmo di 10, è

$$2, 3025850929940456840179914 \dots \text{ ec.}$$

Di questi logaritmi di 10 si farà uso nell' articolo seguente.

104. Intanto si noti, che i logaritmi della base 10 oltre le utilità generali di tutti i logaritmi di basi diverse, hanno le proprie, e particolari, per cui vengono a preferenza d'ogni altro sistema usati ne' calcoli. Qualunque sistema di logaritmi dà i logaritmi de' numeri naturali (e conseguentemente d'ogni altro numero), composti d'un numero intero chiamato *caratteristica*, e d'una frazione decimale, chiamata da Eulero, e da altri *mantissa*. Ora, i logaritmi de' numeri naturali, tra 1, e 10, stanno nel sistema di $a=10$, tra lo zero, e l'unità; i logaritmi de' numeri tra 10, e 100, stanno tra 1, e 2, e così nel resto. Onde; 1.º Dato il logaritmo volgare d'un numero, si conosce dalla semplice caratteristica di quante figure (intere) debba essere composto il numero, che gli corrisponde, e dal numero dato si conosce la caratteristica del suo logaritmo; dacchè *la caratteristica del logaritmo volgare è composta di tante unità una meno, quante sono le figure (intere) nel dato numero.*

2.º Aumentando di n unità la caratteristica d'un logaritmo, si ha il logaritmo del n^{esimo} del numero medesimo. Queste due

pro-

proprietà, che portano una facilità sorprendente ai calcoli, non sono comuni ai logaritmi di base diversa dai volgari.

*Riduzione d'un dato Sistema di Logaritmi
a qualunque altro Sistema cercato.*

105. **N**Oi non abbiamo per le mani, che i logaritmi costruiti sulla base 10; eppure assai volte, o è utile, o è necessario d'avere i logaritmi costruiti su qualche base diversa. Una generale proprietà de' logaritmi di qualunque sistema ci mette a stato di supplire ad ogni bisogno colle sole tavole comuni: Essa è, che i logaritmi di due numeri di un sistema sono in proporzione geometrica coi logaritmi de' due medesimi numeri dedotti da un altro sistema.

Siano m, n i logaritmi di due numeri A, A' formati colla base a ; si avrà $A=a^m, A'=a^n$, ed alzando la prima equazione alla potenza n , e la seconda alla potenza m , farà $A^n = a^{mn}, A'^m = a^{mn}$, cioè $A^n = A'^m$, ossia $A = A'^{\frac{m}{n}}$; Allo stesso modo, dati i logaritmi m', n' de' due medesimi numeri in un altro sistema di base a' , farà $A = A'^{\frac{m'}{n'}}$; dunque $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$.

106. Quindi; 1.º $n' = \frac{m'}{m} \cdot n$. Cioè, se m è il logaritmo d'un numero A' nel sistema comune, ed m' il logaritmo del medesimo numero in qualunque altro sistema, si avrà il logaritmo n' d'un altro qualunque numero A in questo sistema medesimo. A cagione d'esempio, il logaritmo comune m di $A'=10$ è l'unità, ed il logaritmo iperbolico di 10 è 2, 3025... ec. = m' ; farà $\frac{m'}{m} = \frac{2, 3025 \dots \text{ ec.}}{1}$; donde, chiamando L il logaritmo iperbolico di A , farà $L A = L A' \times 2, 3025 \dots \text{ ec.}$

Q

107.

107. 2.^o $n = \frac{m}{m'}$. n.^o. Cioè, se invece de' logaritmi comuni

avessimo le tavole de' logaritmi d'un altro sistema, farebbe ancora facile il trovare i logaritmi comuni de' numeri. A cagione d'esempio, il logaritmo comune m di 10 è l'unità, ed il logaritmo iperbolico m' di 10 è 2, 3025... ec.;

farà $\frac{m}{m'} = 0, 434294481903251827... ec.$;

donde $lA = LA \times 0, 434294... ec.$

Uso delle tavole de' Logaritmi comuni.

108. **T**rovate per mezzo delle tavole il logaritmo, che corrisponde ad un dato numero A .

In questo problema non si trova difficoltà alcuna, finchè nel caso, in cui A sia un numero misto d'una parte intera, e d'una frazione, o volgare, o decimale, oppure sia A un numero intero maggiore del massimo delle tavole, o finalmente sia una semplice frazione decimale.

Egli è evidente, che i logaritmi de' numeri interi minori del massimo delle tavole si leggono in tutte le tavole immediatamente scritti accanto al dato numero, e che il logaritmo d'una frazione $\frac{v}{y}$ è $lv - ly$. Spiegheremo qui le formole per que' tre

primi casi, e soggiungeremo in seguito i compendj, e le avvertenze necessarie per usarle con facilità.

109. Se il dato numero A è misto d'una parte intera B , e d'una frazione C ; si cerchi immediatamente dalle tavole lB , e $l(B+1)$, e sia $l(B+1) - lB = D$; facendo $1 : C :: D : x$, sarà $lA = lB + x$.

110. Se il dato numero A è un numero intero maggiore del massimo delle tavole; si divida A per un numero t tale, che

che nel quoziente $B + C$ resti la parte intera B composta di tante figure, una meno, quante sono nel massimo numero delle tavole; sarà $\frac{A}{t} = B + C$, si cerchi (num. 109.) il logaritmo di

$B + C$; sarà $l(B + C) = l\frac{A}{t} = lA - lt$; donde $lA = (B + C) + lt$.

111. Se il dato numero A è una semplice frazione decimale, si moltiplichi A per un numero t tale, che il prodotto B sia un numero intero; sarà $B = At$, ed $lB = lAt = lA + lt$; donde $lA = lB - lt$.

112. Ecco alcuni compendj. Nel primo problema; 1.^o Se A sia C una frazione volgare rappresentata da $\frac{E}{F}$, si avrà A

$= \frac{BF + E}{F}$, e $lA = l(BF + E) - lF$; giova questo compendio, massimamente quando $BF + E$ non è un numero maggiore del massimo delle tavole.

2.^o Se la frazione C sia una semplice frazione decimale di r figure, avendone n l'intero B , ed $n + r$ non sia numero maggiore del numero m di zeri, che ha il massimo delle tavole, basterà considerare $B + C$ come un numero intero, e sarà $(10)^r A = B + C$, e trovato il logaritmo di $B + C$ immediatamente dalle tavole, sarà $l(B + C) = l(10)^r A = lA + l(10)^r$; donde $lA = l(B + C) - r, 000... ec.$

3.^o Se $n + r > m$, si pigliano le prime figure m , come se esprimessero un intero B , ed il residuo fosse un rotto decimale C ; trovato col metodo del num. 109. il $l(B + C)$, sarà $lA = (lB + C) - (m - n), 000... ec.$

4.^o Si noti, che il precedente compendio avrà uso ancor quando sia A un semplice decimale, ed $r > m$, basta fare nella formola precedente $n = 0$, e sarà $lA = l(B + C) - m, 0000... ec.$

113. Siccome la moltiplicazione, o divisione d'un numero per

per un termine della serie decadica 10. 100. 1000... ec. si fa facilmente, o coll'aggiungere al dato numero verso la destra de' zeri, o colla virgola separatrice de' decimali, farà meglio, nel problema secondo, e terzo, prendere per t un termine della serie medesima. Così al num. 110. sia 1 con m zeri il massimo numero delle tavole, ed il numero dato A abbia figure $m+r$; si chiami B l'intero espresso dalle sole figure prime m (cioè prese da sinistra a destra), ed il resto considerato come decimale si chiami C ; farà $\frac{A}{(10)^r} = B + C$, e trovato (num. 109.) il logaritmo di $B + C$, farà $l(B + C) = l\frac{A}{(10)^r} = lA - l(10)^r$, donde $lA = l(B + C) + r$, 000... ec. Ed al num. 111., sia r il numero delle figure, che vengono dopo la virgola nel decimale A , e sia l'intero $B = (10)^r A$; farà $lB = lA + l(10)^r$; onde $lA = lB - r$, 0000... ec.

114. Avvertenze. 1.º Il logaritmo trovato al num. 109. non è del tutto esatto, ma solo prossimamente: Il metodo suppone le differenze de' numeri proporzionali alle differenze de' loro logaritmi, ciocchè non è vero parlando per se; per avere i medj geometrici, non basta il prendere gli aritmetici.
2.º Le differenze de' logaritmi tanto sono più prossimamente proporzionali alle differenze de' numeri, quanto i numeri sono più grandi, e si discostano enormemente dalla proporzionalità ne' numeri molto piccoli, come di una, ed anche di due figure. Ciò si può dimostrare *a priori*, ma si vedrà facilmente dalle tavole: Se si prendano nelle tavole comuni i $l(A+2) - l(A+1)$, e $l(A+1) - lA$, non si troveranno mai eguali queste differenze, ma esse si scosteranno poco dall'uguaglianza, se A si pigli verso il fine delle tavole, e saranno molto disuguali tra se, se si pigliano verso al principio.

3.º Quindi nel caso del num. 109. se B fosse un numero troppo

troppo piccolo, converrebbe ridurre la frazione volgare C in decimali, e servirsi d'uno de' compendj posti al num. 113., ma basterà pigliare un numero $2m-n$ di figure decimali.

4.º In generale però si può vedere con facilità fino a quali figure di decimali debba essere esatto il logaritmo, che si trova col metodo del num. 109. si esamini fino a quali figure di decimali sia $l(B+1) - lB$ eguale a $l(B+2) - l(B+1)$, e fino alle stesse sarà sicuramente esatto l' s del num. 109.; lo farà fors'anche fino all'immediata seguente, essendo più proporzionali le differenze tra $l(B+1)$, e lB , che tra $l(B+2)$, e lo stesso lB ; le inferiori figure per l'ordinario verranno erronee.

115. Trovare per mezzo delle tavole il numero, che corrisponde ad un dato logaritmo comune. Anche in questo secondo problema tre soli sono i casi, che seco portano qualche difficoltà: Quando il dato logaritmo è minore del massimo logaritmo delle tavole: Quando il dato logaritmo è maggiore del logaritmo massimo delle tavole: Quando il dato logaritmo è negativo. E' evidente, che se il dato logaritmo si trova esatto nelle tavole, vi sarà scritto accanto il numero, che vi corrisponde.

116. Se il dato logaritmo lA è minore del massimo delle tavole. Sia lB il logaritmo prossimamente minore di lA , farà $l(B+1)$ il logaritmo prossimamente maggiore, si faccia

$$l(B+1) - lB : 1 :: lA - lB : \frac{lA - lB}{l(B+1) - lB} = s;$$

farà $A = B + s$.

117. Se lA è maggiore del massimo logaritmo delle tavole. Sia $m+n$ la caratteristica del massimo logaritmo delle tavole, ed $m+n$ la caratteristica di lA ; si faccia

$$lA - n, 0000... ec. = l\frac{A}{(10)^n} = lB;$$

farà $A = (10)^n B$.

118. Se

118. Se LA è negativo. Sia $n = m$ la caratteristica di A ; si faccia $LA + (m + n)$, ooo... ec. $= I(10)^{m+n} A = IB$;

$$\text{sarà } A = \frac{I}{(10)^{m+n}} B.$$

119. Queste formole si deducono da' medesimi principj, da' quali si sono dedotte quelle del problema precedente, ed hanno de' compendj analoghi, e delle simili avvertenze.

Nel primo problema; 1.º Se la caratteristica è troppo piccola, conviene, per evitare gli errori, accrescerla quanto si può: Sia $m+1$ la caratteristica massima delle tavole, ed $m-n$ la caratteristica del dato logaritmo: Si trovi il numero corrispondente alla caratteristica m unita alla data mantissa, riducendo la frazione in decimali, e si trasporti la virgola divisoria da destra a sinistra per figure n , cosicchè siano $m-n$ figure negli interi:

2.º La frazione s si dovrà sempre ridurre in decimali, e di questi basterà trovarne tante figure, che tra interi, ed essi vi sia un numero $2m$ di figure; il resto non sarebbe esatto.

3.º Spesso non farà bisogno di tener conto della frazione, principalmente quando la caratteristica fosse zero, oppure 1, ed insieme bastasse di avere il numero cercato in tre, o due decimali; si cerchi al fine delle tavole comuni il numero corrispondente alla data mantissa, e si prendano una, o due delle quattro figure, che formano il numero corrispondente, per interi, e le altre per decimali.

120. Nel secondo problema; 1.º Se fosse $n > m$, basterà svolgere la frazione, che sta in B in decimali, finchè vi sieno figure in tutto $2m$; a questo B si aggiungano verso la destra tanti zeri fino a compire un numero di figure $m+n+1$.

2.º Si potrebbe dividere il dato logaritmo in due, o più, tali, che tutti si trovino nelle tavole, e prendere il prodotto de' loro numeri; ma questo metodo sarà il più delle volte, o difficile assai, o fatto all'azzardo.

121. Nel

121. Nel problema terzo: 1.º Si può considerare lo LA come positivo, e trovato il numero A , che vi corrisponde, sarà $\frac{I}{A}$ il numero cercato.

2.º Se cercando la frazione $\frac{E}{F}$, che corrisponde ad un logaritmo negativo LA , si voglia, che il denominatore F , o il numeratore E sia un numero dato, sarà nel primo caso $IE = IF + LA$, e nel secondo sarà $IF = IE - LA$.

3.º Se nella formola del num. 119. fosse $m = 0$, come spesso accade ne' calcoli ordinari, la formola sarebbe più semplice, cioè $A = \frac{I}{(10)^n} B$; ed allora per n basterebbe prendere il logaritmo n del massimo numero 10000 delle tavole comuni.

Metodo per evitare i Logaritmi negativi.

122. In qualunque sistema de' logaritmi, il logaritmo delle frazioni proprie è negativo, per essere, come s'è dimostrato, il logaritmo dell'unità eguale a zero. Sanno i soli calcolatori di tavole astronomiche, e quegli, che maneggiano per mezzo de' logaritmi i problemi trigonometrici quanto grande imbarazzo s'introduca ne' calcoli un po' prolissi da questi logaritmi delle frazioni, onde ben a proposito s'è pensato ad un metodo facile, e sicuro per evitarli. Tutto il metodo è fondato sulla seguente proposizione:

Si può supporre, che il logaritmo dell'unità sia $(10)^n$; e tutti i logaritmi ideali, che in questa supposizione si dedurranno dal calcolo per le frazioni, corrisponderanno a frazioni decimali, che avranno verso la sinistra tanti zero meno uno, quante sono le unità, che mancano alla caratteristica per compire l'affunto termine decadico: Un'occhiata alla seguente tavola.

Nu-

Numeri Naturali. Logaritmi Volgari. Logaritmi Ideali.

10000....	+ 4, 000000....	14, 000000....	104, 000000
1000....	+ 3, 000000....	13, 000000....	103, 000000
100....	+ 2, 000000....	12, 000000....	102, 000000
10.....	+ 1, 000000....	11, 000000....	101, 000000
1.....	0, 000000....	10, 000000....	100, 000000
0, 1.....	- 1, 000000....	9, 000000....	99, 000000
0, 01....	- 2, 000000....	8, 000000....	98, 000000
0, 001...	- 3, 000000....	7, 000000....	97, 000000
0, 0001..	- 4, 000000....	6, 000000....	96, 000000
.....	ec.		

123. Sembra, che si cambi con questa supposizione tutta la teoria de' logaritmi; dacchè fatto $y=1$, non è più $a^{(10)^n}$ eguale all'unità; ma, a vero dire, non si porta con ciò alcuno concerto nelle tavole logaritmiche. Fatta che sia comune a tutti i logaritmi questa supposizione, si cambieranno tutti nella ragione stessa, o, che è lo stesso, le variazioni saranno relativamente tutte eguali. Se si aggiungano a tutte le caratteristiche de' logaritmi n unità, si moltiplicano i numeri corrispondenti per $(10)^n$, ma, e questi, e quegli mantengono sempre la stessa ragione tra se, che avevan prima. In una parola, l'artificio presente si riduce al compendio terzo del num. 119., ed equivale all'uso delle tavole, che incominciano non dal zero, ma da $(10)^n$.

124. Ciò supposto: Sia $(10)^n$ il logaritmo dell'unità, e sia L la lettera, che indica il logaritmo ideale d'un numero qualunque A ; si disegni, come prima, per l il logaritmo comune del medesimo A , e per q la mantissa di A .

Si avrà $LA = (10)^n + lA$

quindi $LA^m = (10)^n + lA^m = (10)^n + mlA$

$$LA^{\frac{1}{m}} = (10)^n + lA^{\frac{1}{m}} = (10)^n + \frac{1}{m}lA.$$

125. E'

125. E' evidente: 1.º Che per avere il logaritmo ideale di qualunque numero A , e di qualunque sua potenza, o radice, di cui sia dato il logaritmo comune, basta aggiungere $(10)^n$ al dato logaritmo comune del medesimo, o, che è lo stesso, basta sostituire nelle precedenti tre formole ecumeniche il valore di lA , mlA , $\frac{1}{m}lA$.

2.º Che per avere il logaritmo comune di un numero A , e di qualunque sua potenza, o radice, di cui sia dato il logaritmo ideale, basta sottrarre $(10)^n$ dal dato logaritmo ideale, ossia trasportare nelle precedenti tre formole ecumeniche il termine $(10)^n$, e sostituirvi il valore di LA , LA^m , $LA^{\frac{1}{m}}$.

126. Nei calcoli ordinari della trigonometria, e dall'astronomia, è sufficiente il supporre $n=1$. Si dinoti adunque con l' il complemento aritmetico d'un dato logaritmo comune, cioè la differenza del dato logaritmo da 10, e facendo nelle predette formole le sostituzioni di lA , preso dagli articoli precedenti, si avrà

Per la prima Formola Ecumenica

$$LA = (10)^n + lA$$

I. Se A è un numero intero di r figure,

$$\text{farà } LA = 9 + r + qA$$

II. Se A è una frazione decimale; chiamando D le figure significative del medesimo, prese per intere, ed r il numero totale delle figure tra zeri, ed interi, che vengono dopo la virgola;

$$\text{farà } LA = (10 - r) + lD$$

III. Se A è una frazione $\frac{B}{C}$, comunque B , o C , o amendue

siano numeri interi, o decimali;

$$\text{farà } LA = lB + l'C$$

R

IV. Se

IV. Se A è una frazione $\frac{I}{C}$, comunque C sia intero, o decimale;

$$\text{farà } LA = I'C$$

Per la seconda Formola Ecumenica

$$LA^m = (10)^n + mIA$$

V. Se A è un numero intero di r figure;

$$\text{farà } LA^m = 10 + m(r-1) + mIA$$

VI. Se A è una frazione decimale di r figure dopo la virgola, contando anche le significative D ;

$$\text{farà } LA^m = 10 - mr + mL$$

VII. Se A è una frazione $\frac{B}{C}$, comunque B , o C , o amendue siano numeri interi, o decimali;

$$\text{farà } LA^m = 10(1-m) + m(LB + I'C)$$

VIII. Se A è una frazione $\frac{I}{C}$, comunque C sia intero, o decimale;

$$\text{farà } LA^m = 10(1-m) + mI'C$$

Per la terza Formola Ecumenica

$$LA^{\frac{1}{m}} = (10)^n + \frac{I}{m}IA$$

Basta sostituire nelle quattro formole dedotte dalla seconda Ecumenica il numero $\frac{I}{m}$ invece di m .

127. Colla trasposizione del num. 125. si può avere il numero, che corrisponde ad un logaritmo ideale; ma v'ha per ciò un'altra strada più corta, e più semplice. Si trovino sul fine delle tavole le figure corrispondenti alla mantissa del dato logaritmo ideale, e chiamando t la caratteristica del medesimo lo-

ga-

garitmo; 1.º Se $t=9$, tutte le figure trovate si mettano immediatamente dopo la virgola decimale.

2.º Se $t > 9$, si metta la virgola decimale dopo $t-9$ figure prese da sinistra verso la destra.

3.º Se $t < 9$, si metta dopo la virgola, ed alla sinistra delle figure trovate, un numero $9-t$ di zeri. Tutto è evidente dall'essere nel primo caso $9-10=-1$, che per il num. 103. ci fa riporre subito dopo la virgola le figure corrispondenti alla mantissa del logaritmo, che ha -1 per caratteristica.

128. Il frequente uso delle precedenti formole suggerirà ne' casi particolari certi compendj, che infinita, e noiosa cosa sarebbe il riferirgli qui minutamente. Ne accenno due soli.

1.º Se nel cercare il logaritmo ideale di $\frac{B}{C}$, quando B , e C sono frazioni decimali, si usi la formola III., si dovranno fare tre sottrazioni; si avrà con compendio di calcolo il logaritmo cercato, se si sottragga il LC da LB , aggiungendo se fa bisogno tante diecine alla caratteristica di LB , quante se ne richiegono per potervi, dopo la sottrazione delle altre figure, sottrarre ancora la caratteristica di LC dalla caratteristica di LB .

2.º Trovandosi facilmente col metodo precedente il $L\frac{B}{C}$, quando siano B , C numeri decimali, la formola VII., per avere il logaritmo ideale della potenza m di $\frac{B}{C}$ si riduce a sottrarre da $mL\frac{B}{C}$, o dalla sua caratteristica, il numero $10(m-1)$, e conseguentemente per avere il logaritmo ideale della radice m di $\frac{B}{C}$, basta aggiungere a $L\frac{B}{C}$, o alla sua caratteristica, il numero $10(m-1)$, e dividere per m tutta la somma.

R 2

129. Par-

129. Parmi, che coi cinque articoli, ne' quali è suddiviso il presente capo resti dedotta, non senza qualche particolare eleganza, da' suoi più sodi, e più universal principj tutta la teoria de' logaritmi: Principalmente in quest' ultimo articolo mi sono studiato di trattare ampiamente la teoria de' logaritmi negativi. Essa è stata introdotta da pochi anni in quà, ma nessuno, ch'io sappia, s'è finora presa la pena di ridurla a metodo, ed a formole facili (*) all' uso. Unicamente ho letto su questa materia il Sig. De La Lande, che al libro ventesimo quarto della sua Astronomia, stende la pura pratica di questo calcolo *per le frazioni decimali*; e l'Abbate La Caille, che al num. 344... ec. de' suoi Elementi d'algebra insegna l'uso delle tavole logaritmiche formate sull' ipotesi di $l1 = 10$ per le frazioni volgari, e decimali.

LI.

(*) La Teoria de' logaritmi negativi è una parte delle Matematiche Elementari la più interessante per tutti i Calcolatori; converrebbe però (dicono alcuni) che si rendesse più piana, ed adattata alla pratica, spogliandola, per quanto si può, da quel serioso, e per alcuni aspro corredo delle formole algebriche. Io veramente mi sono fermato soltanto a sviluppare i principj generali sui quali essa s'appoggia, ed a dedurne le formole astratte per tutto il calcolo: Ciò solo portava l'uniformità del metodo, che regna in tutta questa, qualunque siasi, operetta: Lo svolgere esattamente tutte le formole in teoremi, ed il fare certe particolari riflessioni esemplificate con esempi a scioglimento di quelle difficoltà, che s'incontrano nella loro applicazione, l'ho lasciato qui, e dappertutto altrove, all' industria, ed al privato studio del leggitore. Come però sono convinto della necessità di far bene a tutti comprendere il calcolo de' logaritmi negativi, mi sono determinato ad inserire al fine del secondo mio libro una Memoria, ultimamente composta, ed ancora inedita, su questa materia, del P. Ruggiero Boscovich. Questa supplirà abbondevolmente a tutto; abbraccia essa, e la teoria, e la pratica, di modo, che può omettere l'una chi solamente dilettisi dell'altra, e chi si compiacce d'amendue le potrà vedere in un sol punto di vista unite, ed illustrate. Tra l'altre sue belle riflessioni, prende il P. B. ad esaminare un caso da me indicato solamente, perchè con qualche calcolo riducibile agli altri, cioè quando A sia una tale frazione $\frac{BCD... ec.}{MNP... ec.}$, che abbia uno, o più fattori decimali in uno, o in amendue de' suoi termini.

LIBRO SECONDO.

Formazione, e Sommazione delle Serie.

CAPO PRIMO.

Serie, che nascono dalle potenze, e dalle radici algebriche.



Proprietà delle potenze d'un binomio.

1. **S**I chiama *Serie*, come è noto, dagli Analisti qualunque moltitudine, ammasso, unione di quantità, che le une alle altre succedansi con un cert' ordine, e con una costante legge comune a tutti; e la parte più interessante nella teoria delle serie è di trovare i termini generali delle serie proposte, e date le serie, o i loro termini generali, trovare la somma generale delle medesime. Per andare con ordine in questa trattazione, esporrò nel presente capo, e nel seguente, diverse serie, che naturalmente si svolgono, e nascono dal calcolo delle quantità algebriche, e nel capo terzo, dopo d'averle distinte in classi, ed espresse generalmente diverse serie, spiegherò il metodo per trovare la loro somma, ed il loro termine generale.

2. Le serie, che nascono dalle potenze algebriche d'un binomio vogliono essere le prime a considerarsi: tutte racchiudonsi sotto la forma $(a + b)^{m-1}$: Contempliamo per ciò nella tavola seconda le potenze prima, seconda, terza... di $a + b$.
1.º La più alta potenza di a , ha per esponente l'esponente della potenza di $a + b$, e sta solamente nel primo termine di ciascuna potenza, andando sempre sminuendo d'un' unità negli altri

altri, fino all'ultimo termine, nel quale non si trova potenza alcuna di a , ovvero si trova a^0 .

2.° La seconda parte b del binomio $a+b$ non si vede nel primo termine, o più veramente, vi si trova coll'esponente zero, è di una dimensione nel secondo termine, e da questo agli altri termini crescono sempre d'un'unità gli esponenti delle sue potenze, fino all'ultimo, in cui egli ha la sua potenza massima d'esponente eguale all'esponente della potenza.

3.° Quindi in ciascuna potenza di $a+b$ gli esponenti della prima parte a formano una progressione aritmetica decrescente colla differenza costante eguale all'unità, e gli esponenti di b formano la stessa progressione, ma rovesciata, cioè disposta con ordine contrario. Tutto s'intenda andando da sinistra verso la destra.

4.° In ciascun termine le dimensioni, o gli esponenti delle potenze di a , e di b prese insieme sono tante, quante sono le unità nell'esponente della potenza, e quindi tutti i termini delle particolari potenze di $a+b$ sono omogenei.

5.° Ciascuna potenza del binomio è formata da tanti termini più uno, quante sono le unità nell'esponente del grado; la seconda potenza ha tre termini, la terza quattro..... ec.

6.° In qualunque potenza di $a+b$ il numero de' termini, ne quali si trova b , è eguale al numero de' termini, ne quali si trova l' a , e questo numero è eguale all'esponente della potenza.

7.° L'ultimo termine di qualunque potenza, cioè b^m è eguale al coefficiente mb , che ha l'altra parte a del binomio nel secondo termine della potenza medesima, ma diviso per m , ed

alzato alla potenza m ; $b^2 = \left(\frac{2b}{2}\right)^2$

$$b^3 = \left(\frac{3b}{3}\right)^3$$

... ec.

8.° Da

8.° Da ciascuna formola delle potenze di $a+b$, si deducono le parti componenti di ciascuna potenza d'un binomio. Il quadrato, o la seconda potenza d'un binomio qualunque è composto dai quadrati delle parti, e da due prodotti della prima parte nella seconda; il cubo, o la terza potenza d'un binomio qualunque è composto da' cubi delle parti, da' tre prodotti del quadrato della prima parte nella seconda, e da' tre prodotti del quadrato della seconda nella prima. La quarta potenza... ec.

3. Meritano una particolare riflessione i coefficienti numerici de' termini di ciascuna potenza. 1.° In ciascuna potenza di $a+b$ i coefficienti numerici de' termini egualmente lontani dagli estremi sono eguali. Nella quinta potenza di $a+b$ il coefficiente 5 del secondo termine è eguale al coefficiente 6 del penultimo; il... ec.

2.° I coefficienti numerici di ciascuna potenza, crescono di termine in termine, quindi con ordine contrario decrescono fino all'ultimo.

3.° Quindi per le potenze d'esponente impari, basta trovare i coefficienti della metà del numero de' termini, per avere i coefficienti degli altri termini: per le potenze d'esponenti pari... ec.

4.° I coefficienti de' primi termini delle potenze di $a+b$ formano una serie parallela d'unità: i coefficienti de' secondi termini formano la serie de' numeri naturali: i coefficienti degli altri termini formano diverse serie di numeri, che tutte nascono dalla somma continua de' termini della serie precedente.

5.° Se l'esponente della prima parte a d'un termine qualunque n^{esimo} , si moltiplichi per il coefficiente numerico del medesimo termine n^{esimo} , ed il prodotto si divida per il numero de' termini precedenti inclusivamente il termine n^{esimo} , il quoto farà eguale al coefficiente del termine, che segue, cioè del termine $(n+1)^{\text{esimo}}$.

4. Soggiungo due altri metodi per trovare i coefficienti di ciascun termine per le formole delle potenze di $a+b$.

Pri-

Primo metodo 1. 1. coefficienti della prima potenza

$$\frac{1.1}{1.2.1} \dots \text{coefficienti della seconda potenza}$$

$$\frac{1.2.1}{1.3.3.1} \dots \text{coefficienti della terza potenza}$$

$$\frac{1.3.3.1}{1.4.6.4.1} \text{ coefficienti della quarta potenza}$$

..... ec.

Secondo metodo più semplice. Si alzi alla potenza m il binomio $1+1$; i termini di questa potenza saranno i coefficienti della potenza m del binomio $a+b$.

$$(1+1)^1 = 1+1 \dots \text{coefficienti di } (a+b)^1$$

$$(1+1)^2 = 1+2+1 \dots \text{coefficienti di } (a+b)^2$$

..... ec.

5. Queste considerazioni sulle potenze del binomio $a+b$ hanno grandissimo uso nell'Analisi delle equazioni: ne accenno due soli. 1.° Ci sono molte equazioni, nelle quali uno de' membri può divenire una potenza perfetta d'una quantità conosciuta, coll'aggiungere all'equazione medesima, o col sottrarne un'altra conosciuta quantità: Se si sottragga b^2 dai membri dell'equazione $x^3 - 3bx^2 + 3b^2x = c^3$, si ha $x^3 - 3bx^2 + 3b^2x - b^3 = c^3 - b^3$, in cui il primo membro è un cubo perfetto di $x-b$; aggiungendo a^3 ai membri dell'equazione $x^3 - 2ax = bc$, si ha $x^3 - 2ax + a^3 = bc + a^3 \dots ec.$

2.° Rendendo con quest'artificio potenza perfetta di qualche quantità uno de' membri dell'equazione, si viene ad avere il valore dell'incognita con una semplice estrazione di radici. Per le equazioni di secondo grado della forma $x^2 - px - q = 0$, farà $x^2 - px = q$, ed aggiungendo il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine px , cioè aggiungendo $\frac{1}{4}p^2$,

si ha

si ha $x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$; donde estraendo la radice seconda, si ha $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, come al num. 94 dell'introduzione.

Per le equazioni di grado quarto della forma $x^4 - px^2 - qx - r = 0$, farà $x^4 - px^2 = qx + r$, ed aggiungendo $zx^2 + \frac{(p+z)^2}{4}$

$$\text{si avrà } A \dots x^4 - (p-z)x^2 + \frac{(p+z)^2}{4} = zx^2 + qx + r +$$

$$\frac{(p+z)^2}{4} = z \left(x^2 + \frac{qx}{z} + \frac{r}{z} + \frac{(p+z)^2}{4z} \right).$$

Considerando il primo membro di quest'equazione, si vede subito, che esso è un quadrato perfetto; il secondo membro dell'equazione medesima sarebbe pure un quadrato moltiplicato per z , se fosse $\frac{q^2}{4z^2}$

$$= \frac{r}{z} + \frac{(p+z)^2}{4z}, \text{ cioè se fosse } \frac{q^2}{4z} = r + \frac{(p+z)^2}{4}, \text{ ossia se fosse}$$

$$z^3 + 2pz^2 + p^2z - q^2 = 0; \text{ sostituendo adunque in } A \text{ il valore}$$

$$\text{di } z \text{ preso da questa equazione, ed estraendo le radici, si avrà}$$

$$\text{trafponendo, } x^2 + x\sqrt{z} + \frac{q}{2\sqrt{z}} = 0; \text{ che, coll'ambiguità de'}$$

$$+ \frac{z-p}{2}$$

segni, e $\sqrt{x^2}$, esprime tutte e quattro le radici della data equazione.

6. Ma per tornare al nostro proposito; per il num. 2. si hanno per ordine tutte le potenze di ciascuna parte a, b del binomio $a+b$; per il num. 3. si trovano i coefficienti di ciascun termine delle potenze medesime; per avere adunque qua-

Inque potenza del binomio $a + b$, non farà bisogno, che di unire acconciamente insieme questi coefficienti, e queste potenze delle parti a, b . Così i coefficienti della quarta potenza d'un binomio sono 1. 4. 6. 4. 1; le potenze della prima parte a sono $a^4 . a^3 . a^2 . a^1 . a^0$; le potenze della seconda parte b sono $b^0 . b^1 . b^2 . b^3$; si dispongano queste tre serie, come nella figura seguente, e moltiplicando separatamente tutto ciò, che si trova nella stessa colonna verticale

a^4	a^3	a^2	a^1	a^0
b^0	b^1	b^2	b^3	b^4
1	4	6	4	1

Sarà $(a + b)^4 = a^4 + 4b a^3 + 6b^2 a^2 + 4b^3 a + b^4$

7. Se si potesse generalmente esprimere per qualunque grado di potenze ciascuna di queste tre serie; la moltiplicazione de' termini di queste serie, fatta come nell'esempio precedente, ci darebbe una espressione generale di tutte le potenze d'un binomio, e ciò basterebbe per isvolgere in serie le quantità della forma $(a + b)^{m-1}$. Proviamoci a farlo.

Evoluzione in serie delle potenze d'un binomio.

8. **S**ia P la prima parte del dato binomio, e Q la seconda; farà $P + Q$ la generale espressione del medesimo; sia in oltre $m - 1$ l'esponente della potenza cercata.

1.º L'esponente del primo termine di qualunque potenza è eguale all'esponente della potenza cercata; il primo termine adunque di qualunque potenza $m - 1$ di $P + Q$, farà P^{m-1} ; e siccome gli esponenti della prima parte P vanno scemando d'un'unità negli altri termini, la serie delle potenze di P farà generalmente

$P^{m-1} . P^{m-2} . P^{m-3} . P^{m-4} . P^{m-5}$ ec.

2.º La

2.º La seconda parte Q ha l'esponente zero nel primo termine, l'esponente 1 nel secondo, il 2 nel terzo... ec., cioè la serie delle potenze della seconda parte Q farà generalmente

$Q^0 . Q^1 . Q^2 . Q^3 . Q^4 . Q^5$ ec.

3.º Si moltiplichi l'esponente $m - 1$ della prima parte P , che sta nel primo termine, per il coefficiente 1 del primo termine medesimo, e si divida il prodotto per il numero de' termini, che precedono il secondo; si avrà $\frac{m-1}{1}$ per coefficiente del secondo termine; Moltiplicando $m - 2$ esponente di P , che sta nel secondo termine per $\frac{m-1}{1}$ coefficiente del secondo termine, si ha $\frac{m-1 . m-2}{1}$; e dividendo questo prodotto per 2, numero

de' termini, che precedono il terzo, si ha $\frac{m-1 . m-2}{1 . 2}$ per coefficiente del terzo termine; e colla stessa legge si troverà generalmente la serie de' coefficienti

$1; \frac{m-1}{1}; \frac{m-1 . m-2}{1 . 2}; \frac{m-1 . m-2 . m-3}{1 . 2 . 3};$ ec.

4.º Disponendo queste tre serie come nel num. precedente, si avrà

P^{m-1}	P^{m-2}	P^{m-3} ec.
Q^0	Q^1	Q^2 ec.
1	$\frac{m-1}{1}$	$\frac{m-1 . m-2}{1 . 2}$ ec.

$(P + Q)^{m-1} = P^{m-1} + \frac{m-1}{1} P^{m-2} Q + \frac{m-1 . m-2}{1 . 2} P^{m-3} Q^2 +$ ec.

Questa formola con poche sostituzioni si riduce alla celebre formola Newtoniana del binomio.

9. **Q**ualunque quantità polinomiale si può separare in due parti, una delle quali si chiami P , e l'altra Q : quindi colla precedente formola si può elevare a qualunque potenza $m-1$ qualunque quantità polinomiale; l'esperienza però mostra quanto siano noiose le frequenti sostituzioni, che si devono perciò fare nella predetta formola, di quantità alle volte assai complesse. Tentiamo adunque, colla scorta di Eulero, di renderla più comoda del pari, che universale anche per le quantità infinitesime (*).

Si offervi: 1.° Che $P + Q$ è eguale a $P(1 + \frac{Q}{P})$; cioè $(P+Q)^{m-1} = P^{m-1} (1 + \frac{Q}{P})^{m-1}$; alzando adunque alla potenza $m-1$ il secondo fattore $1 + \frac{Q}{P}$, e moltiplicando ciascuno de' suoi termini per P^{m-1} , si avrà la potenza $m-1$ di $P+Q$.

2.° Per

(*) Il P. Ruggiero Giuseppe Boscovich ha pubblicato nel giornale de' letterati di Roma all' anno 1747. un altro elegantissimo metodo, per alzare un infinitesimo a qualunque potenza, e nel 1748. vi ha aggiunto una memoria divisa in due parti, che contiene varie importanti riflessioni sul metodo medesimo. Uno de' singolari pregi di questo metodo si è, che fa trovare immediatamente da se, e con somma facilità qualunque termine della potenza cercata senza avere ricorso ai termini precedenti; con ciò egli schiva le frequenti diverse sostituzioni, sempre necessarie negli altri metodi, e sempre moleste al calcolatore. Noi ci siamo serviti in questo secondo libro del metodo d' Eulero per essere più uniformi nello scrivere, e più coerenti a tutta la presente dottrina della evoluzione delle serie; ma stimiamo di non dovere privare il pubblico del piacere, e del profitto, che possono trarre gli Studiosi delle Matematiche, dalla lettura d'una memoria ancora inedita del citato P. B., in cui ha egli resa la dimostrazione del suo metodo, e più diretta, ed incomparabilmente più semplice, che nelle altre due. Questa memoria si troverà al fine del libro.

2.° Per alzare $1 + \frac{Q}{P}$ alla potenza $m-1$; è evidente, che se

$$\text{farà } \frac{Q}{P} = ax, \text{ farà pure } (1 + \frac{Q}{P})^{m-1} = (1 + ax)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1} ax + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} a^2 x^2 + \frac{m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^3 + \dots \text{ ec.}$$

$$\text{Se } \frac{Q}{P} = ax + bx^2, \text{ farà } (1 + \frac{Q}{P})^{m-1} = (1 + (ax + bx^2))^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1} (ax + bx^2) + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} (ax + bx^2)^2 + \dots \text{ ec.}$$

$$\text{Se } \frac{Q}{P} = ax + bx^2 + cx^3, \text{ farà } (1 + \frac{Q}{P})^{m-1} = (1 + (ax + bx^2 + cx^3))^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1} (ax + bx^2 + cx^3) + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} (ax + bx^2 + cx^3)^2 + \dots \text{ ec.}$$

Se... ec.

10. Supposte queste cose; 1.° Si rappresenti indeterminatamente la potenza $m-1$ di $1 + \frac{Q}{P}$ colla serie $1 + Ax + Bx^2$

$$+ Cx^3 + \dots + Kx^{m-2} + Lx^{m-1} + Mx^{m-1} + Nx^m;$$

resta a trovarsi il valore di $A, B, C, D \dots$ ec.

2.° Col metodo esposto nella introduzione, si formino le potenze particolari indicate nel num. precedente, e per ciascuna supposizione del valore $\frac{Q}{P}$ si ordini per x la potenza $(1 + \frac{Q}{P})^{m-1}$; rappresentandosi colla serie precedente ciascuna serie di $(1 + \frac{Q}{P})^{m-1}$ si potranno supporre eguali tra se i termini corrispondenti di am-

amendue; onde si ha $(1 + ax)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1} ax$
 $+ \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} a^2 x^2 + \frac{m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^3 + \dots$ ec.

ed $A = \frac{m-1}{1} a$ $C = \frac{m-3}{3} a B$ $N = \frac{m-n}{n} a M.$

$B = \frac{m-2}{2} a A$ $D = \frac{m-4}{4} a C$

Di più si ha $(1 + ax + bx^2)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1} ax$

$+ \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} a^2 x^2 + \dots$ ec.

$+ \frac{m-1}{1} b x^2$

ed $A = \frac{m-1}{1} a$ $C = \frac{m-3}{3} a B + \frac{2m-3}{3} b A$

$B = \frac{m-2}{2} a A$ $N = \frac{m-n}{n} a M + \frac{2m-n}{n} b L$

Finalmente si ha per l'ultima supposizione

$(1 + ax + bx^2 + cx^3)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1} ax$

$+ \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} a^2 x^2 + \frac{m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^3 + \dots$ ec.

$+ \frac{m-1}{1} a^2 x^2$ $+ \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} 2abx^3$ $+ \dots$ ec.

$+ \frac{m-1}{1} c^3 x^3$ $+ \dots$ ec.

ed

ed $A = \frac{m-1}{1} a$

$B = \frac{m-2}{2} a A + \frac{2m-2}{2} b$

$C = \frac{m-3}{3} a B + \frac{2m-3}{3} b A + \frac{3m-3}{3} c$

$N = \frac{m-n}{n} a M + \frac{2m-n}{n} b L + \frac{3m-n}{n} c K$

11. Quindi si ha generalmente per l'infinitomio

$(1 + ax + bx^2 + cx^3 + \dots)^{m-1} = 1 + Ax$

$+ Bx^2 + Cx^3 + \dots$ ec.; ed

$A = \frac{m-1}{1} a$

$B = \frac{m-2}{2} a A + \frac{2m-2}{2} b$

$C = \frac{m-3}{3} a B + \frac{2m-3}{3} b A + \frac{3m-3}{3} c$

$D = \frac{m-4}{4} a C + \frac{2m-4}{4} b B + \frac{3m-4}{4} c A + \frac{4m-4}{4} d$

$E = \frac{m-5}{5} a D + \frac{2m-5}{5} b C + \frac{3m-5}{5} c B + \frac{4m-5}{5} d A + \frac{5m-5}{5} e$

.... ec.

12. E' facilissimo l'uso di questa formola per la formazione delle potenze. Si riduca la quantità data ad avere l'unità per primo termine, come s'è fatto al num. 9.; si paragonino i coefficienti della lettera x , che distingue i termini nella quantità data

data coi coefficienti della formola $1 + ax + bx^2 \dots$ ec., si sostituisca nelle formole di $A, B, C \dots$ il valore di m , e di $a, b, c \dots$ ec.

13. Nella formola medesima si noti: 1.° Che il coefficiente N viene determinato dai coefficienti di tanti termini della quantità data, quante sono le lettere $a, b, c \dots$ delle quali è composto $\frac{m}{P}$; fatto $\frac{m}{P} = ax$, l' N è determinato dal precedente termine M ; fatto $\frac{m}{P} = ax + bx^2$, l' N è determinato da due precedenti termini L, M .

2.° Che le particolari formole di $A, B, C, D, E \dots$ ec., si possono continuare all' infinito; E' chiara la legge, che vi regna: Nella colonna de' primi termini l' m è diminuito successivamente di $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n$, cioè de' numeri della serie naturale; il divisore di $m - n$ è sempre n ; le lettere piccole nella prima colonna sono tutte a , nella seconda sono sempre b , nella terza c ; ... coll' ordine alfabetico, ed in ciascuna colonna il primo termine è senza lettere majuscole, il secondo contiene l' A , il terzo B , il quarto $C \dots$ parimenti coll' ordine alfabetico.

14. Si noti finalmente, come di passaggio, che la serie de' coefficienti $\frac{m-1}{1}; \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2}; \frac{m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \dots$ ec.

scioglie compiutamente il problema, tanto usato nell' algebra, delle combinazioni. Data qualunque moltitudine $m-1$ di lettere $a; b; c; d \dots$ ec. trovare quanti diversi prodotti di due, di tre, di quattro ... lettere si possono formare. E' evidente, che facendo il prodotto di ciascuna lettera in ciascuna delle altre, ciascuna lettera entra ne' prodotti un egual numero di volte, e che dovendosi ciascuna lettera moltiplicare per ciascuna delle altre, e non per se stessa, ciascuna lettera entra ne' prodotti

doti un numero di volte $m-2$; ma ogni prodotto verrà due volte, giacchè $pq = p \times q = q \times p$; quindi i prodotti delle lettere, ne' suoi diversi binari faranno $\frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2}$;

Così pure per avere i ternari è necessario moltiplicare ogni binario per tutte le altre lettere tolte le sue due, e verrà tre volte lo stesso prodotto, quando per qualunque delle sue tre lettere si moltiplicherà il residuo suo binario, onde il numero de' prodotti a tre a tre, sarà $\frac{m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$;

similmente il numero de' prodotti a quattro a quattro, sarà $\frac{m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, e così nelle altre combinazioni.

Onde il coefficiente del termine $n+1$ nella formola del binomio esprimerà il numero de' prodotti, o delle combinazioni d' un numero qualunque di lettere prese n ad n .

Evoluzioni delle quantità radicali.

15. **T**Orniamo alle proposte formole. Non servono esse solamente a svolgere in serie le quantità finite, o infinitesime della forma $(a+b)^{m-1}$, oppure $(1+ax+bx^2+cx^3 \dots \text{ec.})^{m-1}$; anche le quantità radicali si sottopongono facilmente alle formole medesime, essendosi dimostrato

nell' introduzione, che $\sqrt[m]{a^r} = a^{\frac{r}{m}}$; Si faccia $m-1 = \frac{r}{s}$, e si divida a in due parti $P \rightarrow Q$; non vi sarà maggiore difficoltà nell' estrarre le radici, che nel formare le potenze. Resta a dimostrarsi, che le formole abbian luogo, qualunque sia il numero $m-1$.

T

S'è

S'è già veduto il caso, in cui $m-1$ sia un numero intero positivo. Se $m-1$ è numero rotto positivo rappresentato da $\frac{r}{s}$, e ridotto a minimi termini; Si alzi, per mezzo della formola, la data quantità $1+x$ alla potenza $\frac{r}{s}$; si avrà una quantità dife-

gnabile per $1+x$: dunque se questa è eguale ad $(1+x)^{\frac{r}{s}}$, elevando ciascuna alla potenza s si avrà $(1+x)^s = (1+x)^r$: ora, facendo il calcolo, che veramente è longhissimo, si trovano identiche queste espressioni.

Se $m-1$ è numero intero, o rotto negativo; Si rappresenti per $-\frac{r}{s}$, e si avrà $(1+x)^{-\frac{r}{s}} = \frac{1}{(1+x)^{\frac{r}{s}}}$; Si trovi: 1.º Il va-

lore di $(1+x)^{-\frac{r}{s}}$, supponendo a ciò buona la formola delle potenze; si avrà $1+x$.

2.º Si trovi colla medesima formola il valore di $(1+x)^{\frac{r}{s}}$;

Sostituendo questo valore di $(1+x)^{\frac{r}{s}}$ al denominatore di $\frac{1}{(1+x)^{\frac{r}{s}}}$, dovrebbe essere $\frac{1}{(1+x)^{\frac{r}{s}}} = 1+x$; $\frac{1}{(1+x)^{\frac{r}{s}}} = (1+x)^s$,

ed $(1+x)^s (1+x)^{\frac{r}{s}} = 1$, come pure farà vedere il calcolo.

16. Applichiamo la formola ad un esempio. Si cerchi la radice seconda di $a^2 + 2ab + b^2$; Si avrà $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = (a^2 + 2ab + b^2)^{\frac{1}{2}}$

1.º

1.º $m-1 = \frac{1}{2}$

$m-2 = -\frac{1}{2}$

$m-3 = -\frac{3}{2}$

... ec.

2.º $\frac{m-1}{1} = \frac{1}{2}$

$\frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} = -\frac{1}{8}$

$\frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-3}{3} = \frac{1}{16}$

... ec.

3.º $P = a^2$

$P^{m-1} = a$

$P^{m-2} = \frac{1}{a}$

... ec.

4.º $Q = 2ab + b^2$

$Q^2 = 4a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$Q^3 = 8b^3a^2 + 12b^4a^2 + 6b^5a + b^6$

... ec.

Moltiplicando i termini corrispondenti, si ha

$a + b + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^3}{2a} + \dots$ ec.

Sembra a prima giunta, che questa serie non esprima il vero valore della radice cercata, che, come a tutti è noto, dovrebbe essere $a+b$; ma, facendovi un po di riflessione, si vede manifestamente l'identità di queste due espressioni. Nella proposta serie i termini, che vengon dopo i primi due, si elidono vicendevolmente. Il termine $\frac{b^2}{2a}$, viene eliso dal seguente $-\frac{b^3}{2a}$, e così

nel resto; onde la serie si riduce ad $a+b$.

17. Si noti; 1.º Che ciocchè s'è detto della prima formola delle potenze, vale ancora per l'altra più generale delle quantità infinitesime.

T 2

2.º Che

- 2.^o Che le serie dedotte da queste formole sono serie finite quando $m-1$ è un numero intero positivo.
 3.^o Che negli altri casi si hanno sempre serie prodotte all'infinito, o almeno sotto una forma di termini infiniti.

Altro metodo per l'Evoluzione de' radicali.

18. **S**ia A la data quantità radicale di grado $m-1$; C la sua radice prossima; E la parte sconosciuta, che si dovrebbe aggiungere a C per avere la radice esatta.

Sarà $A = (C + E)^{m-1} = C^{m-1} + \frac{m-1}{1} C^{m-2} E + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} C^{m-3} E^2 + \dots$ ec.; trascurando tutti i termini, che contengono E alzato ad una potenza maggiore di E^2 , si avrà

$$A = C^{m-1} + \frac{m-1}{1} C^{m-2} E + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} C^{m-3} E^2.$$

D'onde $\frac{m-1}{1} C^{m-2} E + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} C^{m-3} E^2 = A - C^{m-1} = B$.

Si divida quest'ultima equazione, 1.^o per $\frac{m-1}{1} C^{m-2}$.

2. Per $\frac{m-1}{1} C^{m-2} + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} C^{m-3} E$; si avrà dalla prima divisione $\frac{B}{\frac{m-1}{1} C^{m-2}}$ maggiore di E della piccolissima fra-

zione $\frac{m-1 \cdot m-2 \cdot C^{m-3} E^2}{2 \frac{m-1}{1} C^{m-2}} = \frac{m-2 \cdot E^2}{2 C}$; e dalla seconda si

avrà $E = \frac{B}{\frac{m-1}{1} C^{m-2} + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} C^{m-3} E}$; e sostituendo al

deno-

denominatore del secondo membro il primo valore di E ; si avrà

$$E = \frac{B}{m-1 \cdot C^{m-2} + \frac{m-1 \cdot m-2}{2} \frac{C^{m-3} B}{m-1 \cdot C^{m-2}}} \\ = \frac{B}{m-1 \cdot C^{m-2} + \frac{m-2 \cdot B}{2} C}$$

e moltiplicando per C i termini di questa frazione, si ha

$$E = \frac{BC}{m-1 \cdot C^{m-1} + \frac{m-2}{2} B}$$
 da aggiungersi a C .

Tre altre formole per la Evoluzione de' radicali.

19. **S**i divida la seconda equazione del num. precedente per il coefficiente di E^2 , si compisca il quadrato (num. 5.), e si sciolga l'equazione, che ne risulta; si avrà

$$E^2 + \frac{2}{m-2} C E = \frac{2B}{m-1 \cdot m-2 \cdot C^{m-3}},$$

ed $E = -\frac{1}{m-2} C \pm \sqrt{\frac{1}{(m-2)^2} C^2 + \frac{2}{m-1 \cdot m-2} \cdot \frac{B}{C^{m-3}}}$;

e facendo $\frac{B}{m-1 \cdot C^{m-3}} = D$, farà

$$E = -\frac{1}{m-2} C \pm \sqrt{\frac{1}{(m-2)^2} C^2 + \frac{2D}{m-2}}$$

20. Si aggiunga C all'ultima equazione del num. precedente, si avrà $C + E = \frac{m-2}{m-2} C \pm \sqrt{\frac{1}{(m-2)^2} C^2 + \frac{2D}{m-2}}$.

21. Di-

21. Dividendo per $\frac{m-1}{1}C^{m-1}$ la terza equazione del num. 18,

si ha $CE + \frac{m-2}{2}E^2 = D$; ossia $(C + \frac{m-2}{2}E)E = D$;

$$\text{dove } E = \frac{D}{C + \frac{m-2}{2}E}.$$

22. Sulle precedenti formole si noti in generale: 1.° Che esse si applicano egualmente a numeri, che alle quantità algebriche.

2.° Che le formole irrazionali, cioè quelle, che contengono qualche parte radicale non sono buone, che pe' gradi più elevati del secondo.

3.° Che le radici razionali danno una radice approssimata minore della vera, e le irrazionali la danno maggiore; più però s'accostano queste al vero valore, che non quelle.

4.° Che fatta una determinazione di E , se ne può fare una seconda, una terza, e così all'infinito; basta chiamare C la radice già trovata per mezzo delle formole, quindi determinare un nuovo B ... così si correggerà l'errore, per cui nessuna delle formole precedenti dà la radice esatta, cioè l'aver da principio neglimentati i termini, in cui E ha più di due dimensioni.

5.° Le formole saranno tante più esatte, quanto più il C s'accosterà alla radice vera; Quindi ne' numeri si prende assai volte per primo C il numero prossimamente maggiore della radice della massima potenza. Ciò si fa quando il numero dato è più vicino ad una potenza maggiore, che ad una minore alla data; l'operazione mostrerà in questi casi le variazioni, che si devono fare ne' segni.

6.° Sostituendo nelle precedenti formole i valori di m per i diversi gradi di radici, si stenderanno facilmente delle tavole utili,

li, o delle particolari formole per tutti i casi. Dalla formola del num. 20. si deducono tutte le formole proposte dall'Allejo per l'estrazione, ed approssimazione delle radici.

Ultimo metodo per la Evoluzione de' radicali.

23. **Q**uesto è il più semplice ad enunciarsi, ed a mettersi in pratica. Si estragga col metodo esposto nell'introduzione, la radice della potenza massima, che sta nascosta nella quantità data; Si continui ad operare sull'ultimo residuo collo stesso metodo, unendo al calcolo delle quantità intere anche quello delle frazioni.

Per la quantità $\sqrt{a^2 + x^2}$; prendo la radice quadrata di a^2 , che è a , e la scrivo accanto ad $a^2 + x^2$; sottraggo il quadrato di a , cioè a^2 , da $a^2 + x^2$; resta $+x^2$. Divido $+x^2$ per il doppio del primo termine della radice, e trovo per secondo termine $+\frac{x^2}{2a}$. Moltiplico $+\frac{x^2}{2a}$ per $2a + \frac{x^2}{2a}$, e sottraggo il prodotto $+x^2 + \frac{x^4}{4a^2}$ da $+x^2$; resta $-\frac{x^4}{4a^2}$. Divido questo residuo per il doppio di $a + \frac{x^2}{2a}$, e trovo, per terzo termine della radice, $-\frac{x^4}{8a^3}$. Continuando allo stesso modo l'operazione, avrò un numero indefinito di termini, cioè una serie infinita, che esprimerà il valore di $\sqrt{a^2 + x^2}$

$$\begin{array}{r} \frac{a^2 + x^2}{-a^2} \Big) a^2 + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \dots \text{cc.} \\ \underline{+ x^2} \\ \frac{x^2}{+ x^2} - \frac{x^4}{4a^2} \\ \underline{- \frac{x^4}{4a^2}} \\ \dots \text{cc.} \end{array}$$

24. Se la proposta quantità fosse $\sqrt{x^2 + a^2}$; colle stesse

operazioni si avrebbe $x + \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} + \frac{a^6}{16x^5} - \frac{a^8}{128x^7} + \dots \text{cc.}$

25. Se a^2 è maggiore di x^2 farà più convergente la serie del num. 23.; Se x^2 è maggiore di a^2 , farà più convergente la serie del num. 24.; Se a^2 è eguale ad x^2 , amendue le serie saranno parallele. Col medesimo metodo si ridurranno in serie le radicali trinomie, quadrinomie... ec.

Applicazione de' metodi precedenti alle quantità numeriche.

26. **T**Ra tutte le formole spiegate sopra per l'evoluzione delle quantità radicali, scelgo ad applicare a' numeri interi qu.lli del num. 21., perchè mi sembra più difficile delle altre. Con questa formola si fa l'estrazione di qualunque radice da qualunque numero per mezzo della semplice divisione, maneggiata però con qualche particolare artificio. Spiegherò in prima le preparazioni necessarie per ridurre qualunque dato numero ad essere un dividendo capace di dare co' quotti di ciascuna operazione ciascuna figura della radice, che si cerca; spiegherò in secondo luogo quali essere debbano i membri della

della divisione; in terzo luogo quale divisore, e quale minutore si debba prendere in ciascuna operazione.

Preparazioni. 1.º Il numero dato A si separi da destra a sinistra in classi di tante figure ciascuna, quante sono unità nell'esponente della radice cercata; l'ultima classe, cioè quella, che sta più a sinistra, non importa, che sia composta d'un minor numero di figure, del quale lo sono le altre, anche da una sola. 2.º Si estraiga (Tav. 1.ª) dall'ultima classe la radice vera, o prossimamente minore della cercata; essa farà la prima parte, ossia la più alta figura della radice cercata.

3.º Si sottragga dall'ultima classe del dato numero A la potenza della radice trovata, d'esponente eguale all'esponente della radice cercata; si chiami B il residuo.

4.º Si premettano verso la destra della parte radicale trovata tanti zeri, quante sono le classi del dato numero, una meno; si chiami C il prodotto.

5.º Si alzi C alla potenza d'esponente eguale all'esponente della radice cercata meno due unità, e per il prodotto di questa potenza moltiplicata per l'esponente della radice cercata si divida B ; il quoto farà il cercato dividendo D .

$$D = \frac{B}{m-1 C^{m-2}} \dots B = A - C^{m-1}$$

Membri della divisione. Si separi da destra a sinistra il dividendo D , come nelle radici quadrate; la prima classe a sinistra meno l'ultima figura della classe medesima farà il primo membro della divisione: Il residuo del minutore sottratto da tutta intera questa prima classe, con la classe, che immediatamente la segue verso la destra (meno l'ultima figura) farà il secondo membro della divisione, e così nel resto fino a comprendere in qualche membro di divisione tutte le classi del dividendo una ad una, come nell'ordinaria divisione.

U

Di-

Divisori. Si prenda sempre nell'operazione seguente per divisore tutto intero il numero radicale E trovato colle precedenti divisioni; il primo divisore però farà in qualunque estrazione di radici la prima parte trovata nella preparazione di A .

Minutori. Si moltiplichino il quadrato di E per l'esponente della radice cercata sminuito d'un'unità; alla metà del prodotto si aggiunga il decuplo del divisore moltiplicato per E ; si avrà il minutore M .

$$M = CE + \frac{m-2}{2} E^2$$

Esempio. Si cerchi la radice quarta di $27.9841\dots A$. La radice quarta della prima classe 27 è 2 ; sottraendo $(2)^4$ da 27 , si ha per residuo 11 , che congiunto all'altra classe da $119841\dots B$; mettendo un zero avanti alla prima parte radicale 2 a ragione del numero delle classi, si ha $20\dots C$. La potenza d'esponente $4-2$ di C è 400 , che moltiplicata per 4 esponente della radice da 1600 ; e dividendo B per 1600 , si ha $74,9\dots D$. Dividendo la classe 74 meno la prima figura 4 , cioè dividendo 7 per la trovata figura radicale 2 , si ha per quoto $3\dots E$ e quindi $CE = 60$

$$\frac{m-2}{2} E^2 = \frac{27}{2}$$

$$\text{cioè } M = 60 + \frac{27}{2} = 73,5$$

da sottrarsi dall'intera classe 74 ; il residuo $0,5$ congiunto colle altre figure $0,90$, cioè $1,4$ è da trascurarsi.

27 . Questo residuo da trascurarsi, è la maggiore difficoltà, che s'incontra nell'applicazione a' numeri della nostra formola. Per quale ragione s'ha a trascurare l'ultimo residuo? e se si deve trascurare, perchè mai s'ingiunge di fare l'ultima sottrazione, coll' inutile calcolo di trovare l'ultimo valore di M ? Fa

an-

ancora forpresa il vedere, che cercando col nostro metodo le radici de' quadrati perfetti si ha sempre zero per residuo, e nelle altre potenze di grado più elevato, e comunque perfette, si ha sempre un residuo maggiore del zero. Ma si rifletta 1.^o alla natura de' minutori, che si adoperano in ciascuna operazione. Nelle radici quadrate D è rigorosamente eguale ad M ; cioè $D = M$, donde $D - M = 0$; ma nelle altre radici qualunque, anche di potenze perfette, D è eguale ad M , ed a qualche cosa di più; a cagione d'esempio: Se $m-1 = 4$ come nel caso nostro, farà $D = (C + \frac{3}{2}E)E + \frac{E^3}{C} + \frac{E^4}{4C^2} = M + (E + \frac{E^3}{4C})\frac{E^2}{C^2}$;

perciò è, che sottraendo da D il solo M , non si sottrae tutta quella quantità, che sola potrebbe rendere il residuo eguale a zero.

Si rifletta in 2.^o luogo, che il più delle volte non si prende per D l'esatto valore di $\frac{B}{m-1 C^{m-1}}$, ma un valore approssima-

to in decimali; come nell'esempio addotto s'è preso per D il numero $74,9$, quando dovrebbe essere $74,9\frac{1}{16}$; quindi, comunque il minutore fosse sempre esatto, non si avrebbe sempre zero per residuo, dovendosi perciò sottrarre l'esatto minutore $M + N$ da un esatto D . Di fatti correggendo nel nostro esempio queste due origini d'errore, si avrà zero per residuo

$$D = 74,9\frac{1}{16} \dots M = 73,5$$

$$E = 3 \qquad N = 1,4\frac{1}{16}$$

$$C = 20$$

$$\text{dove } D = M + N, \text{ cioè } 74,9\frac{1}{16} = 73,5 + 1,4\frac{1}{16}$$

U 2

Quan-

Quanto all'ultima sottrazione; essa non è inutile come sembra a primo aspetto. Si fa quest'ultima sottrazione per vedere se l'ultima figura radicale è maggiore del giusto: Suppongo, che nelle figure radicali si mettano sempre i quoti massimi delle particolari divisioni, e perciò, se si veda, che il minutore è maggiore del membro intero della divisione, si avrà un segno sicuro che la figura radicale E , che lo ha prodotto, dovrà sminuirsi d'un' unità, di due, di tre...., finchè M non sia maggiore del membro della divisione.

28. Non va dissimulato un notabile incomodo di questo metodo, comunque egli sia assai semplice, e spedito, e perciò degno d'essere preferito ad ogni altro. Negli altri metodi, se si ha zero per ultimo residuo, egli è certo, che il dato numero è potenza perfetta di grado dato; se si ha un residuo maggiore di zero, il numero dato è veramente una potenza imperfetta: Nel nostro, fuori della quadrata, si ha in qualunque estrazione di radici qualche residuo maggiore del zero, se non si corregge il D , e l' M con lunghi calcoli, ed il mezzo più semplice, ma pur noioso, per vedere se il dato numero è potenza perfetta, o no, è d'alzare la radice trovata alla potenza di grado dato, e se questa potenza A' farà eguale al dato numero, il dato numero farà potenza perfetta, altrimenti no.

29. Quando A sia una potenza imperfetta: 1.º Si sottragga A' da A , e farà $A - A' = B'$, ed operando sopra questo secondo B , come s'è fatto sul primo (prendendo per C la radice trovata), si avrà una nuova approssimazione alla radice vera, massime aggiungendo a B' varj zeri per figure decimali.

2.º Se venga limitato il numero delle figure da averfi nella radice approssimata, non è necessario cercarle tutte col metodo esposto, ma solamente fino ad una figura di più della metà del numero determinato di figure; per trovare poi le altre, basta l'ordinaria divisione dell'ultimo residuo colla radice trovata. Si

ccr-

cerchi la radice quadrata di 7, con dodici figure: Col metodo spiegato si troveranno le prime sette figure 2, 645751, coll'ultimo residuo 822997; si divida quest'ultimo residuo per la radice trovata, fino ad avere cinque figure, si avrà per quoto 32106, e la radice seconda di 7, farà 2, 64575131106. Questa è una elegante proprietà del nostro metodo.

30. In ogni evoluzione de' radicali numerici, c'entrano adunque tre quantità; B , D , M .

Per il secondo grado... $B = A - C^2$

$$D = \frac{B}{2C^0} = \frac{1}{2} B$$

$$M = \left(C + \frac{1}{2} E\right) E$$

Per il terzo grado..... $B = A - C^3$

$$D = \frac{B}{3C}$$

$$M = (C + E) E$$

Per il quarto grado.... $B = A - C^4$

$$D = \frac{B}{4C^2}$$

$$M = \left(C + \frac{3}{2} E\right) E$$

.... ec.

E' facile a vederfi la legge di tutti i B, C, M ; a cagione d'esempio negli M si distinguono due parti; la prima è sempre CE ; e per la seconda parte conviene separare gli M in due classi di radici; cioè le radici d'esponente pari, come la seconda, la quarta, la sesta....; e le radici d'esponente impari; come la terza,

terza, la quinta, la settima Nelle radici della prima classe la seconda parte del minutore è sempre $\frac{1}{2} E^2$ moltiplicato per un termine della serie impari 1.3.5.7... ec.; Nelle radici della seconda classe, la seconda parte del minutore è sempre E^2 moltiplicato per un termine della serie naturale 1.2.3... ec., secondo l'ordine de' gradi, o degli esponenti del dato radicale. Bastano le riflessioni fatte sulla formola del num. 21. per fare comprendere il modo d'applicare le altre formole algebriche ai numeri.

Evoluzione delle radici nelle equazioni composte.

31. **A** Due forme, e non più, si riducono tutte le equazioni composte; altre hanno la forma $x^{m-1} = A$, e si chiamano equazioni *non affette* d'altri termini; altre hanno la forma $ax + bx^2 + cx^3 + \dots$ ec. $= A$, e si chiamano equazioni *affette*. L'equazioni di primo genere si sciogliono

coll' estrazione delle radici, avendosi $x = \sqrt[m-1]{A}$; per le altre,

oltre ai metodi esposti nella introduzione, se ne deduce uno assai semplice dai metodi precedenti.

Si prenda ad arbitrio qualunque quantità C ; se questa farà una radice di x , si avrà $aC + bC^2 + cC^3 + \dots$ ec. $= A$; se $aC + bC^2 + \dots$ ec. farà maggiore di A , quel primo C farà maggiore della radice cercata, e se farà minore di A , quel primo C farà minore della radice medesima: Nel primo caso si dovrà sottrarre da C una quantità E , e nel secondo si dovrà aggiungere a C la quantità medesima E , e nel primo caso farà $x = C - E$, nel secondo farà $x = C + E$. Ci rimane adunque di trovare in ambedue i casi il valore di E ; cerchiamolo nel secondo caso, ed il metodo si adatterà da se stesso al caso primo.

1.º Se

1.º Se $C + E$ è il vero valore di x , si avranno le seguenti equazioni.

$$\text{I. } ax = aC + aE$$

$$\text{II. } bx^2 = bC^2 + 2bCE + bE^2$$

$$\text{III. } cx^3 = cC^3 + 3cC^2E + 3cCE^2 + cE^3$$

$$\text{IV. } dx^4 = \dots \text{ ec.}$$

2.º Trascurando i termini, in cui E ha più di due dimensioni, si avrà

$$aC + aE + bE^2 = A$$

$$bC^2 + 2bCE + 3cCE^2$$

$$cC^3 + 3cC^2E + \dots \text{ ec.}$$

$$\dots \text{ ec.} + \dots \text{ ec.}$$

3.º Facendo eguale ad l il primo termine cognito, la somma de' coefficienti di E eguale ad m , e la somma de' coefficienti di E^2 eguale ad n , si avrà $l + mE + nE^2 = A$, ed $nE^2 + mE = A - l = B$; dividendo quest' equazione per n , ed estraendo le

$$\text{radici, si ha } E = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4nB}}{2n}$$

32. Si divida l'equazione $nE^2 + mE = B$, 1.º per m ;

2.º per $m + nE$;

Si avrà, 1.º $E = \frac{B}{m}$, trascurando $\frac{n}{m} E^2$;

2.º $E = \frac{B}{m + nE}$; cioè, sostituendo in quest' ultima equazione il valore di E della prima, si avrà $E = \frac{B}{m + \frac{nB}{m}}$, e multi-

pli-

plicando per m i termini di questa frazione, farà $E = \frac{mB}{m^2 + nB}$.

33. Su questi valori approssimati di E per le equazioni affette si facciano riflessioni simili a quelle, che si sono fatte sui valori di E per le equazioni non affette, o per l'evoluzione de' radicali. E' evidente inoltre, che quanto farà C più vicino al vero valore di x , farà più convergente il metodo: Per avere con facilità un valore approssimato di x da prenderfi per C fino dalla prima operazione, espongo il metodo per trovare i limiti delle radici d'un' equazione.

Per l'equazione $x^2 + px - q = 0$, farà 1.º $x^2 + px = +q$

$$px < +q$$

$$x < +\frac{q}{p}$$

$$2.º x^2 < +q$$

$$x < \sqrt{q}$$

$$x^2 < x\sqrt{q}$$

$$x^2 + px < x\sqrt{q} + px$$

$$3.º q < x\sqrt{q} + px$$

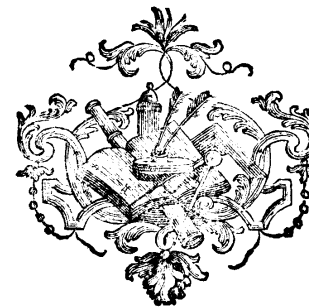
$$q < (\sqrt{q} + p)x$$

$$\frac{q}{\sqrt{q} + p} < x$$

cioè i limiti delle radici faranno $\frac{q}{p}$, e $\frac{q}{\sqrt{q} + p}$; il primo maggiore, il secondo minore del valor vero. Allo stesso modo si troveranno i limiti dell' equazione $x^2 - px + q = 0$, $p\frac{q}{p}$, ed i limiti dell' equazione $x^2 - px - q = 0$, $p + \sqrt{q}$, e $\sqrt{p^2 + q}$; e così

e così nel resto per le equazioni di grado più elevato del secondo. Nell' equazione $x^2 - 5x - 31 = 0$, i limiti sono $\sqrt{36}$, e $5 + \sqrt{31}$, il primo minore, il secondo maggiore di x ; Onde per applicarvi le formole si prenda $C = 8$, e si troverà dopo due periodi d'operazioni, cioè determinati da E , $x = 8,6032 \dots$ ec.

34. Per non avere la noja di calcolare i radicali, e le frazioni, che in questo metodo d'approssimazione s'incontrano non di rado, si sciolga ogni frazione, ed ogni radicale in numeri decimali, come nell' aritmetica comune. E' stato Newton il primo, che ha introdotti i decimali nelle equazioni con impareggiabile compendio, e facilità delle operazioni più intralciate.



CAPO SECONDO.

Serie, che nascono dalle frazioni Algebriche.



Primo metodo per l'evoluzione delle frazioni Algebriche.

35. Il primo metodo per svolgere in serie una frazione qualunque $\frac{a^2}{b \pm x}$, è l'ordinaria divisione algebrica. Dividendo a^2 per b , si ha per primo termine della serie $\frac{a^2}{b}$; sottraendo da a^2 il prodotto $\frac{a^2}{b} \times (b \pm x)$, si ha per residuo $\mp \frac{a^2 x}{b}$; dividendo questo residuo per b , si ha per secondo termine della serie $\mp \frac{a^2 x}{b^2}$, e procedendo con quest'ordine, si avrà la serie

$$\frac{a^2}{b} \mp \frac{a^2 x}{b^2} \mp \frac{a^2 x^2}{b^3} \mp \frac{a^2 x^3}{b^4} \mp \dots \text{ ec.} = A.$$

Se la frazione fosse $\frac{a^2}{x \pm b}$, farebbe la serie a lei eguale

$$\frac{a^2}{x} \mp \frac{a^2 b}{x^2} \mp \frac{a^2 b^2}{x^3} \mp \frac{a^2 b^3}{x^4} \mp \dots \text{ ec.} = B.$$

36. Se nella serie A sia x minore di b , cosicchè $\frac{x}{b}$ sia una frazione propria, la serie A farà convergente; dacchè b , e le potenze di b stanno al denominatore della serie, e sempre più elevate d'un grado, che l' x del numeratore; cioè rende successivamente minori i termini seguenti rispetto ai precedenti; ciò si

fi comprenderà meglio se alla serie A si dia la forma equivalente

$$\left(\frac{a^2}{b} \mp \frac{a^2 x}{b^2} \right) \times \left(1 \mp \frac{x}{b} + \frac{x^2}{b^2} \mp \frac{x^3}{b^3} + \frac{x^4}{b^4} \mp \dots \text{ ec.} \right);$$

Per la ragione contraria si proverà, che se $x < b$, la serie B farà divergente, massime se si riduca alla forma

$$\left(\frac{a^2}{x} \mp \frac{a^2 b}{x^2} \right) \times \left(1 \mp \frac{b}{x} + \frac{b^2}{x^2} \mp \frac{b^3}{x^3} + \frac{b^4}{x^4} \mp \dots \text{ ec.} \right);$$

Collo stesso metodo si potranno dedurre le serie equivalenti alla data frazione, posto $b = x$; in questo caso farà meglio mutare la forma al denominatore, per non avere delle serie, o illusorie, o false.

Secondo Metodo.

37. Si svolgono in serie le frazioni algebriche colla formola delle potenze d'un binomio; E' evidente, che $\frac{a^2}{b \pm x} = a^2 (b \pm x)^{-1}$; si faccia $m - 1 = -1$, cioè $m = 0$, $P = b$, $Q = x$, e si avrà $(b \pm x)^{-1} = 1 \mp b^{-1} x + b^{-2} x^2 \mp \dots \text{ ec.}$, e moltiplicando i termini di questa serie per a^2 , si avrà la serie A del num. 35. Si dica lo stesso negli altri casi.

38. E' evidente, che i due metodi precedenti si applicano del pari alle frazioni di termini comunque complessi; invece di usare la formola del binomio, riuscirà più spedito il calcolo per molte frazioni colla formola dell'infinitinomio, ma crescerà sempre la complicazione del calcolo col crescere i termini delle quantità complesse, che si mettano al numeratore, o al denominatore delle date frazioni. Passo a spiegare un altro metodo più elegante, con cui agevolmente si costruirà una tavola per le frazioni di termini infinitinomi.

39. Sia data la frazione $\frac{a}{b+cx}$; Si supponga $\frac{a}{b+cx} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \dots$ ec., restano a determinarsi i coefficienti $A, B, C \dots$ ec. Moltiplicando l'equazione per $b+cx$, si ha $a = bA + bBx + bCx^2 \dots$ ec. $+ cAx + cBx^2 \dots$ ec., e paragonando i termini corrispondenti ne' due membri di questa equazione, si ha

$$\begin{aligned} bA &= a \\ bB + cA &= 0 \\ bC + cB &= 0 \\ \dots &\text{ec.} \end{aligned}$$

Dalla prima equazione si ha $A = \frac{a}{b}$; con questo valore di A , e colla seconda equazione, si ha $B = -\frac{cA}{b}$, e quindi colla terza $C = \dots$ ec.; cioè con quelle equazioni di primo grado si determineranno i coefficienti cercati, e dopo tre, o quattro determinazioni si vedrà la legge della serie, e si avrà

$$\frac{a}{b+cx} = \frac{a}{b} \times \left(1 - \frac{c}{b}x + \frac{c^2}{b^2}x^2 - \frac{c^3}{b^3}x^3 \dots \text{ec.} \right)$$

40. Considerando attentamente i termini di questa serie, si ha il coefficiente Q di qualunque termine, dato il coefficiente P del termine precedente, essendo $Q = \frac{cP}{b}$, ed avendosi sempre $A = \frac{a}{b}$; si avranno successivamente tutti gli altri. Anzi il coefficiente

ciente

ente di qualunque termine x^n è eguale a $\pm \frac{ac^n}{b^{n+1}}$; il $+$ è per l' n numero pari, il $-$ è per l' n impari, e generalmente il coefficiente di x^n è $\frac{a}{b} \left(-\frac{c}{b} \right)^n$

41. Applicando il medesimo metodo alle frazioni di denominatori trinomj; dati P, Q coefficienti di due termini, si avrà il coefficiente del seguente termine, cioè

$$R = -\frac{cQ + dP}{b};$$

per i denominatori quadrimj, farà

$$S = -\frac{cR + dQ + eP}{b};$$

cioè si ha il coefficiente S dati i coefficienti de' tre termini precedenti, e facendo

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3 \dots \text{ec.}}{1-gx-bx^2-ix^3 \dots \text{ec.}} = A+Bx+Cx^2+Dx^3 \dots \dots \dots$$

$+ Px^n + Qx^{n+1} + Rx^{n+2} + Sx^{n+3} \dots$ ec. Si ha

$$\begin{aligned} A &= a \\ B &= gA + b \\ C &= gB + bA + c \\ D &= gC + bB + iA + d \\ E &= gD + bC + iB + lA + e \\ \dots &\text{ec.} \end{aligned}$$

È chiara la legge di questa serie: i coefficienti della prima colonna sono sempre g , della seconda b , della terza $i \dots$ coll'ordine alfabetico $g, b, i, l, m \dots$ ec.; le lettere majuscole stanno in ciascuna colonna coll'ordine alfabetico $A, B, C, D \dots$ ec., e coll'ordine alfabetico si succedono gli ultimi termini delle colonne $a, b, c, d \dots$ ec.

42. Se la frazione avesse la forma $\frac{a + bx + cx^2 + \dots + bx^{2n}}{(1 - ix)^{m+1}}$;

Si avrà collo stesso metodo il coefficiente del termine distinto da x^n nella serie indeterminata.

per $m = 1$

$$\frac{n+1}{1} i^n a + \frac{n}{1} i^{n-1} b$$

per $m = 2$

$$\frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} i^n a + \frac{n \cdot n+1}{1 \cdot 2} i^{n-1} b + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} i^{n-2} c$$

per $m = 3$

$$\frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+3}{3} i^n a + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} i^{n-1} b + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} i^{n-2} c + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} i^{n-3} d$$

per $m = 4$

..... ec.

43. E più generalmente ancora, se la frazione avrà la forma

$$\frac{1}{(1 - ax - bx^2 - cx^3 - \dots \text{ec.})^{m+1}}$$

ciascun coefficiente S si determinerà da' coefficienti di tanti termini precedenti, quante sono le lettere a, b, c, d ; e si avrà

$$S = \frac{m+n}{n} a R + \frac{2m+n}{n} b Q + \frac{3m+n}{n} c P + \frac{4m+n}{n} d O + \dots \text{ec.}$$

44. Si noti, che se il primo termine del denominatore della data frazione non fosse un termine conosciuto, come sempre abbiamo supposto fin qui, colla semplice divisione si ridurrebbe alle formole spiegate.

Sia,

Sia, a cagione d'esempio, data la frazione $\frac{a + bx + cx^2 + \dots \text{ec.}}{fx - gx^2 - bx^3 \dots \text{ec.}}$

$= Z$; si avrà $Z = \frac{a + bx + cx^2 + \dots \text{ec.}}{x(f - gx - bx^2 \dots \text{ec.})}$; e determinato $A + Bx$

$+ Cx^2 + \dots \text{ec.} = \frac{a + bx + cx^2 + \dots \text{ec.}}{f - gx - bx^2 \dots \text{ec.}}$; farà $Z = \frac{1}{x} (A + Bx$

$+ Cx^2 + \dots \text{ec.})$; E' manifesto il modo di ridurre il denominatore ad avere per primo termine l'unità, quando prima si sia ridotto ad avere per primo termine una quantità costante.

Spezzamento delle frazioni.

45. Sia la frazione $\frac{a + x^n}{(e + fx)^p (g + bx)^q (k + lx)^r \dots \text{ec.}}$, ed $n < (p + q + r + \dots \text{ec.})$

1.º Si supponga la data frazione rappresentata da

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + \dots + Fx^{p-1}}{(e + fx)^p} + \frac{G + Hx + Ix^2 + \dots + Mx^{q-1}}{(g + bx)^q} + \frac{N + Px + Qx^2 + \dots + Tx^{r-1}}{(k + lx)^r} + \dots \text{ec.}$$

2.º Moltiplicando la proposta equazione, e la frazione indeterminata, per il denominatore della proposta, si ha

$$a + x^n = (A + Bx + Cx^2 + \dots + Fx^{p-1})(g + bx)^q (k + lx)^r \dots + (G + Hx + Ix^2 + \dots + Mx^{q-1})(e + fx)^p (k + lx)^r \dots + \dots \text{ec.}$$

3.º Ordinando il secondo membro dell'equazione per x , e paragonando i termini de' due membri, si avranno tante equazioni, quante sono le lettere indeterminate $A, B \dots \text{ec.}$ donde si avranno

no

no i valori di A, B, C, \dots da sostituirsi nella frazione indeterminata.

Esempio. Nella frazione $\frac{1+z^2}{z(1-z)(1+z)}$, dovendosi pel metodo

prendere tanti termini del numeratore indeterminato, quante sono unità nell'esponente di z del dato fattore, si ha

$$\frac{1+z^2}{z(1-z)(1+z)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{1-z} + \frac{C}{1+z};$$
 e moltiplicando l'equazione per il prodotto de' dati fattori, si ha

1 + z² = -Az² + Bz + A.

$$+Bz^2 + Cz$$

$$-Cz^2$$

paragonando i termini de' due membri di quest'equazione, si ha

$$A = 1$$

$$B + C = 0$$

$$-A + B - C = 1;$$

$$\text{dove } A = 1$$

$$B = 1$$

$$C = -1, \text{ ed } \frac{1+z^2}{z(1-z)(1+z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}$$

46. Non è necessario fare le moltiplicazioni indicate nel metodo, e di ordinare per x il prodotto, come nell'esempio precedente. Si suppongano eguali a zero, uno, ad uno, i denominatori dati, e ciascuna di queste supposizioni ci darà nell'equazione ridotta il valore d'una delle indeterminate. Nel nostro esempio, si ha

$$1+z^2 = A(1-z)(1+z) + B(z)(1+z) + C(z)(1-z).$$

fatto

fatto il primo fattore $z=0$, l'equazione si riduce ad $1=A$.

fatto il secondo fattore $1-z=0$, si ha $z=1$, e l'equazione si riduce ad $1+1=A(1-1)(1+1)+B(1)(1+1)+C(1)(1-1)$ cioè a $2=2B$; donde $B=1$.

fatto il terzo fattore $1+z=0$; si ha allo stesso modo $z=-1$, e $C=-1$.

47. Dalla forma della frazione indeterminata, si vede, che tutti i fattori eguali del dato denominatore devono formare un solo fattore nelle frazioni spezzate; il problema altrimenti ci mena all'impossibile. Sia la frazione

$$\frac{1-2z+3z^2-4z^3}{(z-1)(z-1)(z-2)(2z-1)};$$
 comunque siano quattro i fat-

tori del denominatore, non si possono avere che tre frazioni equivalenti, ed una delle spezzate deve avere per denominatore il prodotto $(z-1)(z-1)$, cioè $(z-1)^2$; in una parola, i denominatori delle frazioni spezzate devono essere primi tra te.

48. Se le radici del denominatore sono immaginarie; 1.º Sia

$$\frac{x^m}{L+Mx+Nx^2+\dots+Ux^n}; \text{ (si suppone sempre } m < n \text{)}$$

$$= \frac{A+Bx}{a+bx+cx^2} + \frac{C+Dx}{c+fx+gx^2} + \frac{E+Fx}{b+kx+lx^2} + \dots \text{ ec.}; \text{ e}$$

$$\text{fia } (e+fx+gx^2)(b+kx+lx^2) = Q; (a+bx+cx^2)(b+kx+lx^2) = R; (a+bx+cx^2)(c+fx+gx^2) = S;$$

farà, secondo il metodo generale, $x^m = (A+Bx)Q + (C+Dx)R + (E+Fx)S + \dots$ ec.; e supponendo (num. 46.) $a+bx+cx^2 = 0$, farà

$$R=0, S=0; \text{ donde } x^m = (A+Bx)Q.$$

Y

2.º Siano

2.º Siano di più le radici immaginarie di $a + bx + cx^2 = 0$, rappresentate da $t + px = 0$, $p + qx = 0$; farà $x = -\frac{t}{p}$, ed $x = -\frac{p}{q}$; e per $x = -\frac{t}{p}$, si ha $\mathcal{Q} = (e + f(-\frac{t}{p}) + g(\frac{t^2}{p^2})) \times (b + k(-\frac{t}{p}) + l(\frac{t^2}{p^2}))$, ed allo stesso modo si avrà un altro valore di \mathcal{Q} , cioè \mathcal{Q}' , per l'altro valore di $x = -\frac{p}{q}$.

3.º Si avranno adunque invece di $x^m = (A + Bx) \mathcal{Q}$ le due seguenti equazioni,

cioè $-\frac{t^m}{p^m} = (A + Bx) \mathcal{Q} \dots$ ed $A = -\frac{t^m}{p^m} : \mathcal{Q} + \frac{t}{p} B$

$-\frac{p^m}{q^m} = (A + Bx) \mathcal{Q}' \dots \dots A = -\frac{p^m}{q^m} : \mathcal{Q}' + \frac{p}{q} B.$

Paragonando insieme questi due valori di A , si avrà il valore di B , e sostituendo questo valore di B nelle due equazioni, che hanno dati i due valori di A , si avrà il valore di A .

4.º Ciocchè s'è fatto sul fattore $a + bx + cx^2$, si faccia altresì su ciascuno degli altri, e collo stesso metodo si avranno sempre i valori delle indeterminate.

49. Se le radici del denominatore sono in parte reali, in parte immaginarie; non v'ha differenza alcuna ne' principj, e nelle deduzioni del calcolo. Eulero dal compendio del num. 45. deduce un affai elegante teorema per rompere le frazioni, che hanno per fattore de' loro denominatori una quantità della forma $(p - qx)^n$: basti accennarlo, la dimostrazione è facile. Sia

$$\frac{M}{N}$$

$\frac{M}{N}$ la frazione data, ed $N = (p - qx)^n X$; fatto $A = \frac{M}{X}$

$$P = \frac{M - AX}{p - qx} \quad B = \frac{P}{X}$$

$$\mathcal{Q} = \frac{P - BX}{p - qx} \quad C = \frac{\mathcal{Q}}{X}$$

$$R = \frac{\mathcal{Q} - CX}{p - qx} \quad D = \frac{R}{X}$$

... ec. ... ec.

$$\text{Sarà } \frac{M}{N} = \frac{A}{(p - qx)^n} + \frac{B}{(p - qx)^{n-1}} + \frac{C}{(p - qx)^{n-2}} \dots + \frac{K}{p - qx}$$

Si suppone, che in M , ed in X si metta il valore di x cavato

dall'equazione $p - qx = 0$, cioè $x = \frac{p}{q}$.

50. L'ultimo problema sullo spezzamento delle frazioni, è di spezzare una data frazione in più altre, che siano tante in numero, quanti sono i fattori della data, ed abbiano ciascuna il numeratore eguale al numeratore della medesima.

E' evidente, che ogni frazione si può ridurre ad avere per numeratore l'unità; così $\frac{a}{b}$ è eguale ad a moltiplicato per $\frac{1}{b}$. Si potrà adunque supporre, che il numeratore della data, e delle cercate frazioni sia l'unità, e dopo spezzata la frazione data, e ridotta in questa forma, basterà mettere il dato numeratore per numeratore delle frazioni spezzate invece dell'unità.

51. Siano adunque date le frazioni $\frac{1}{xy}$, $\frac{1}{xz}$, $\frac{1}{yz}$, ... ec.

$$\text{Sarà } \frac{1}{xy} = \frac{1}{x(y-x)} + \frac{1}{y(x-y)}$$

$$\frac{1}{xyz} = \frac{1}{x(y-x)(z-x)} + \frac{1}{y(x-y)(z-y)} + \frac{1}{z(x-z)(y-z)}$$

$$\frac{1}{xyzv} = \frac{1}{x(y-x)(z-x)(v-x)} + \dots \text{ ec.}$$

..... ec.

Cioè ognuna delle frazioni parziali avrà per denominatore uno de' dati fattori moltiplicato per tutti i binomi, che si formano, sottraendo esso da tutti gli altri; ed in fatti, riducendo al comune denominatore le equazioni precedenti, si troverà per numeratore d' ambedue i membri la stessa quantità.

52. Nel fare questa riduzione al comune denominatore, si noti: 1.º Che ne' denominatori del secondo membro delle precedenti equazioni ogni binomio viene due volte lo stesso, ma co' segni contrarj, essendo, a cagione d'esempio, il binomio $y-x$, che sta al primo termine del secondo membro nella prima equazione affatto eguale al binomio $x-y$, che sta al secondo termine del membro medesimo; quindi, riducendosi tutti, a due, a due, ad una stessa forma, si scemerà per metà il loro numero; e però anche la fatica del calcolo ne' casi più composti.

2.º Nel mutare questi segni sarà bene serbare un ordine costante, mettendo sempre per positivo quel fattore, che ave' sono scritti i fattori nella frazione data è scritto il primo, prendendo a cagione d'esempio nella terza equazione i soli $x-y$, $x-z$, $x-v$, $y-z$, $y-v$, $z-v$. In questo modo nel primo termine d'ogni secondo membro si muteranno tutti i segni de' binomj, nel secondo ne resterà un solo non mutato, nel terzo due, e nell'ultimo non se ne muterà alcuno. Quindi basterà la-

lasciare all'ultimo termine il suo segno positivo, e mutarlo alternativamente ne' precedenti.

53. Fatta colle premesse due avvertenze la riduzione delle equazioni poste al num. 51., si avrà

$$\text{I. per } \frac{1}{xy}$$

$$x-y = -y+x$$

$$\text{II. per } \frac{1}{xyz}$$

$$(x-y)(x-z)(y-z) = yz(y-z) - xz(x-z) + xy(x-y)$$

$$\text{III. per } \frac{1}{xyzv}$$

$$\begin{aligned} (x-y)(x-z)(x-v)(y-z)(y-v)(z-v) \\ = -yzv(y-z)(y-v)(z-v) \\ + xzv(x-z)(x-v)(z-v) \\ + xyv(x-y)(x-v)(y-v) \\ - xyz(x-y)(x-z)(y-z) \end{aligned}$$

$$\text{IV. per } \dots \text{ ec.}$$

In ciascuna di queste equazioni, il primo membro è sempre eguale al prodotto delle differenze di ciascuno de' dati fattori sopra tutti i seguenti, ed ogni termine del secondo membro è sempre eguale al prodotto di tutti i fattori (tolto nel primo il primo, nel secondo il secondo....fattore), ma moltiplicato per tutti i binomj delle differenze de' medesimi, prese coll'ordine accennato.

54. Se si proverà l'uguaglianza de' due membri di queste supposte equazioni, resterà dimostrato il teorema del num. 51., donde son nati. Ora; 1.º Nella I.ª si vede l'uguaglianza de' due membri dall'identità della espressione.

2.º Nella

2.^o Nella II.^a il calcolo è facile; vengono, colla moltiplicazione attuale, nel primo membro otto termini, e nel secondo sei; ma in quello se ne distruggono due $\pm xyz$, e rimangono in amendue membri i medesimi sei termini, che ordinati in modo che incomincino colla potenza d'esponente 1, e con quell'ordine, con cui sono scritti nella data frazione, sono

$$\begin{aligned} & -xy^2 + yx^2 - zx^2 \\ & + xz^2 - yz^2 + zy^2 \end{aligned}$$

3.^o Nella III.^a il calcolo attuale resta molto più lungo. Nel primo membro essendovi sei binomj, e portando la moltiplicazione per ogni nuovo binomio il raddoppiamento de' termini, si devono avere termini $(2)^6 = 64$, e nel secondo membro portando ciascuno de' quattro termini, dopo la sua evoluzione, sei nuovi termini, corrispondenti a' suoi tre fattori binomj, vi faranno in tutto termini 24. Quindi nel primo membro, perchè resti l'uguaglianza, se ne devono distruggere 40. Si vede anche facilmente quali sieno quegli, che vi devono rimanere.

55. Facciamo qualche riflessione di più su i termini, che devono elidersi, o restare ne' membri dell'equazione III.^a. Nella evoluzione de' tre binomj fatta al num. precedente per l'equazione II.^a sono rimasti tutti, e soli que' termini, che avevano la prima potenza di un fattore, unita colla seconda di un altro. Questo accaderà anche qui in ogni termine del secondo membro, rispetto a que' tre fattori, che entrano nella composizione de' quattro suoi termini; moltiplicando tutti que' termini nati così per tutti que' fattori medesimi, quello, che era elevato alla seconda potenza, lo sarà alla terza, l'altro che aveva la prima, salirà alla seconda, e vi si troverà di nuovo quello che mancava in quel termine: Per esempio, nell'ultimo termine del secondo membro deve nascere x^2y^2 , yx^2z^2 , e colla moltiplicazione per xyz verrà zx^2y^2 , yx^2z^2 . Quindi anche nella evoluzione del

del primo membro, per avere l'uguaglianza col membro secondo, devono restare tutti, e soli que' termini, che hanno tutte le combinazioni possibili delle tre diverse potenze di tre diversi fattori. Ora appunto ciò accade, se si fa l'evoluzione attuale: Per farla ordinatamente, si scrivano i binomj con quell'ordine, con cui sopravvengano al sopravvenire de' nuovi fattori. Gli metterò qui così ridotti, e gli contrassegnò colla lettera A; gli separerò gli uni dagli altri con virgole, che non significhino interrotta la continuazione della moltiplicazione, ma solo mostrino la pertinenza ad un fattore di più; fino alla prima virgola appartengono ai soli xy , fino alla seconda agli xyz , e presi che siano tutti insieme appartengono agli $xyzv$. Finalmente svolgerò coll'attuale moltiplicazione tutti i prodotti contraddistinguendogli coi B, C, D... ec., e ne foggiungerò dopo la spiegazione.

$$\begin{aligned} & 56. \qquad \qquad \qquad A \\ & \qquad \qquad \qquad (x-y), (x-z), (x-v), (y-z), (y-v), (z-v) \\ & \qquad \qquad \qquad B \\ & (x-y) \times \left(xy + \frac{(-x)}{(-y)}z + z^2 \right) \times \left(xyz + \frac{(-xy)}{(-yz)}v + \frac{(x)}{(z)}v^2 - z^2 \right) \\ & \qquad \qquad \qquad C \\ & \qquad \qquad \qquad xy + \frac{(-x)}{(-y)}z + z^2 \\ & \qquad \qquad \qquad D \\ & \qquad \qquad \qquad (+x) \\ & \qquad \qquad \qquad (-y) \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} & (+yx^2) + * (-zx^2) + (xz^2) \\ & (-xy^2) + (1)(-xyz) + (-yz^2) \\ & \quad (1)(+xyz) \\ & \quad * (+zy^2) \end{aligned}$$

F

$$\begin{aligned} & (-xyv) \quad (+xv^2) \\ & xyz + (-xzv) + (+yv^2) - v^3 \\ & (-yzv) \quad (+zv^2) \end{aligned}$$

G

$$\begin{aligned} & (+yx^2) + (-zx^2) + (+xz^2) \\ & (-xy^2) + (+zy^2) + (-yz^2) \end{aligned}$$

H

$$\begin{aligned} & (+zy^2x^2) + * (-vy^2x^2) + * (+yv^2x^2) + (-yx^2v^2) \\ & (-zx^2y^2) + (1)(-yzvx^2) + (1)(+x^2y^2v^2) + (+xy^2v^2) \\ & \quad (2)(-zvx^2y^2) \quad (2)(+yzx^2v^2) \\ & \quad * (+vx^2y^2) \quad (1)(-x^2y^2v^2) \\ & \quad (2)(+zvx^2y^2) \quad * (-xv^2y^2) \\ & \quad (2)(+xzxvy^2) \quad (2)(-xzy^2v^2) \end{aligned}$$

I

$$\begin{aligned} & (-yz^2x^2) + (1)(+yzvx^2) + * (-zv^2x^2) + (+zx^2v^2) \\ & (+xz^2y^2) + * (+vz^2x^2) + (1)(-yzx^2v^2) + (-zy^2v^2) \\ & \quad (4)(+vyx^2z^2) \quad (4)(-x^2z^2v^2) \\ & \quad (3)(-vxxz^2) \quad (3)(+xzy^2v^2) \\ & \quad (5)(-vxy^2z^2) \quad * (+zv^2y^2) \\ & \quad * (-vz^2y^2) \quad (5)(+y^2z^2v^2) \end{aligned}$$

K

K

$$\begin{aligned} & (+yx^2z^2) + (4)(-vyx^2z^2) + (4)(+x^2z^2v^2) + (-xz^2v^2) \\ & (-xy^2z^2) + * (-vx^2z^2) + (6)(+xyx^2v^2) + (+yz^2v^2) \\ & \quad (6)(-vxy^2z^2) \quad * (+xv^2z^2) \\ & \quad (5)(+vxy^2z^2) \quad (6)(-xyx^2v^2) \\ & \quad (6)(+vxy^2z^2) \quad (5)(-y^2z^2v^2) \\ & \quad * (+vy^2z^2) \quad * (-yv^2z^2) \end{aligned}$$

57. In *B* vi sono i binomj di *A* raccolti in tre fattori, formati come si usa nelle equazioni composte, ma prese a rovescio, prendendo, per esempio $(x-v)(y-v)(z-v)$ invece di $(v-x)(v-y)(v-z)$; vengono per tal guisa le stesse combinazioni de' prodotti, ma col segno contrarij.

In *C* vi è la formola de' secondi due binomj, che ha tre colonne, ed in *D* sta il primo binomio, per cui essa si deve moltiplicare.

In *E* vi sono tre colonne, nate dalla moltiplicazione di *C* per *D*; la prima, e l'ultima colonna hanno due termini per ciascuna, che sono della forma xy^2 , xz^2 , e restano: La colonna di mezzo ha due termini, che si distruggono, e sono segnati col numero (1), e ne ha due che restano, e sono segnati coll'altissimo.

In *F* vi è la formola, già ridotta, degli ultimi tre binomj di *A*, uniti in *B*; e in *G*, la formola già trovata in *E* è ridotta coll'ommettere i termini, che si elidono.

In *H*, *I*, *K* vi sono i prodotti di *F* per le tre colonne di *G*, restandovi così quattro colonne, ciascuna delle quali ha tre membri corrispondenti, una per una, alle tre colonne di *G*. Nella prima, ed ultima colonna non si distrugge nulla; nelle due di mezzo si elidono dodici termini per ciascuna, e sono segnati col numero (1), (2)... ec.; rimangono due soli termini per membro, ed hanno la forma xy^2z^2 , $x^2y^2v^2$, rimanendo

Z

cfr

elisi tutti quegli della forma $x^2 y^2 v^2$. Qui se ne trovano ventiquattro elisi, e ve ne farebbero altri sedici, se nella seconda colonna di G si fossero ritenuti que' due, che si sono elisi in E ; giacchè moltiplicando per essi gli otto termini di F si farebbero avuti otto termini per uno, durando sempre i segni contrarj.

58. Quindi, raccogliendo i termini non elisi in H, I, K , ed ordinandogli secondo le potenze, e l'ordine de' dati fattori, si ha il prodotto indicato in A , che è il primo membro dell'equazione III.^a, ma preso col segno contrario; cioè

$$\begin{aligned} & - L - M - N - O \\ & -xy^2z^2 + xy^2v^2 - xz^2v^2 + yz^2v^2 \\ & +xz^2y^2 - xv^2y^2 + xv^2z^2 - yv^2z^2 \\ & +yx^2z^2 - yx^2v^2 + zx^2v^2 - zy^2v^2 \\ & -yz^2x^2 + yv^2x^2 - zv^2x^2 + zv^2y^2 \\ & -zx^2y^2 + vx^2y^2 - vx^2z^2 + vy^2z^2 \\ & +zy^2x^2 - vy^2x^2 + vz^2x^2 - vz^2y^2 \end{aligned}$$

e facendo la moltiplicazione attuale indicata in ciascun termine del secondo membro della medesima equazione III.^a, si avrà

$$\begin{aligned} & -xyz(x-y)(x-z)(y-z) = L \\ & +xyv(x-y)(x-v)(y-v) = M \\ & +xzv(x-z)(x-v)(z-v) = N \\ & -yzv(y-z)(y-v)(z-v) = O. \end{aligned}$$

Ciocchè mostra ad evidenza, che l'equazione supposta al num. 53.

per $\frac{1}{xyzv}$, è una vera equazione.

59. Per quanti artifizj si sieno usati a sminuire il numero de' termini delle attuali moltiplicazioni, ad ogni modo dal solo esempio terzo (num. 53.) si vede chiaro, che ne' casi un po' più composti il calcolo diventa affatto impraticabile. Adoperando però cotali artifizj, si vede almeno in varj esempj la legge de' prodotti, per cui già si può credere generale il teorema, che abbiamo da prima proposto.

60. Per dimostrarlo esattamente, converrebbe 1.^o generalmente dimostrare il seguente teorema.

Se dato un numero m di quantità qualunque, si prendano tutti i binomj, che nascono sottraendo da qualunque delle precedenti, qualunque delle seguenti, e questi binomj si moltiplichino tutti tra se, vi resteranno tutti, e soli que' termini, che si formano di quantità $m-1$, elevate ciascuna alle potenze diverse, 1. 2. 3. $(m-1)$, distruggendosi tutti gli altri.

Dimostrato che fosse questo teorema, sarebbe chiaro, che que' termini devono essere la somma di tutti quegli, che danno le combinazioni di esse prese a $(m-1)$ per volta, e moltiplicate in tutti i binomj, che nascono dalle loro differenze prese coll'ordine già prescritto; dacchè colle successive moltiplicazioni si fa entrare ne' termini un fattore di più, e si aumenta (num. 55.) d'un' unità l'esponente de' primi.

2.^o Converrebbe dimostrare, che i segni nati dal teorema suddetto, cioè i segni del primo membro dell'equazione ridotta (num. 53.), debban essere gli stessi, che nel secondo membro. Ciò si potrebbe fare considerando tutte le combinazioni, che devono nascere ne' prodotti, dalle quantità, e dai segni. In ogni termine vi deve entrare una delle due quantità d'ogni binomio, onde la somma delle potenze deve essere eguale al numero de' binomj; ciascuna quantità si trova in $m-1$ binomj ed è combinata una volta per una colle quantità compagne, cioè negativamente colle precedenti, e positivamente colle seguenti; la

prima è sempre positiva, e l'ultima sempre negativa; ciascuna delle intermedie sono positive tante volte, quante sono quantità, che le vengono dopo, e tante volte negative, quante sono quelle, che la precedono.

Questi elementi guidano ad una dimostrazione generale del teorema del num. 50.

61. Intanto, si deduce con facilità dalle cose dette fin qui, il numero de' binomj, e de' termini, che devono corrispondere a qualunque dato numero m di fattori, de' quali sia composto il denominatore della data frazione. Nel primo membro adunque dell' equazione formata come al num. 53., si avrà

Numero de' fattori

2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8

Numero de' binomj

1 . 3 . 6 . 10 . 15 . 21 . 28

Numero de' termini

2 . 8 . 64 . 1024 . 32768 . 2097152 . 268435456

Numero de' termini residui

2 . 6 . 24 . 120 . 720 . 5040 . 40320

O a dire più certo, e più in generale, il numero de' binomj sarà in ciascun caso $1 + 2 + 3 + \dots + (m - 1)$, cioè $\frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} = n$;

il numero de' termini sarà $(2)^m$; il numero de' residui sarà $1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots \times m$, come si potrà vedere cercando co' metodi da spiegarsi nel capo seguente, i termini generali delle precedenti

deni tre serie. Se non si dimezzava il numero de' binomj, si farebbe avuto nella seconda riga precedente il doppio, e nella terza il quadrato di ogni numero ivi notato.

62. La Sig.^{ra} Agnesi (Istituz. Anal. I. 3. num. 21.) dà qualche esempio di questo metodo di spezzare le frazioni, in ciascuno de' quali vi sono due soli, o al più tre fattori, ed hanno questa forma $\frac{P}{(x+b)(x+c)}$. Il precetto del metodo è espresso

così: „ Dico, che questa sarà eguale a due frazioni, il numeratore delle quali sia lo stesso di questa, ed i denominatori „ sieno; della prima il prodotto d'una delle radici (cioè d'uno „ de' fattori) nella differenza della quantità costante dell'altra „ radice, e della quantità costante della radice posta; della se- „ conda sia il prodotto dell'altra radice nella differenza della „ costante della prima radice, e della costante di questa secon- „ da “. L'applicazione a' suoi esempi si riduce qui ad es- sere $\frac{P}{(x+b)(x+c)} = \frac{P}{(x+b)(c-b)} + \frac{P}{(x+c)(b-c)}$; Si vede dall'

esempio, che per differenza delle due radici intende la prima nominata, meno la seconda. Aggiunge poi „ se le radici fossero „ tre, quattro . . . ec. si proceda sempre collo stesso metodo “; indi per tutta dimostrazione dice „ ed in fatti riducendo al co- „ mune denominatore le frazioni in tal guisa ritrovate, resti- „ tuiranno esse la frazione prima donde sono nate.

63. Chi considera questo parlare della Sig.^{ra} Agnesi, vedrà quanto poco vi si esprime di quello si richiede per un metodo generale. Basta considerare quel tanto poco, che vi vuole per due fattori, con quel tanto di più, che si richiede ove cresca il loro numero, ve'rà facilmente, se il portare l'operazione a più fattori sia un semplice *procedere con quell'istesso metodo*, e con un metodo abbastanza spiegato. Non si vede ivi punto il progresso dell'operazione, che debba tenersi, ove i denominatori sieno

più

più di due; quali sieno le differenze da prendersi in ogni frazione, e da unire in ogni denominatore delle spezzate; e con quale ordine si debbano prendere le differenze medesime. Non vi si esprime nemmeno, che il pigliare la differenza delle sole costanti proviene dal principio più generale del dover prendere la differenza de' fattori, che negli esempj addotti, i quali hanno un x medesimo congiunto con diverse costanti, si riduce alla differenza delle medesime costanti. Innoltre da quanto s'è esposto sopra, si vede quanto sia impraticabile il provare il metodo colla *nuda*, ed attuale riduzione allo stesso denominatore, ove il numero de' fattori sia maggior di due, o tre; tanto più, che dall' Agnesi si piglia la stessa differenza positivamente, e negativamente, onde nel metodo stesso a più fattori vi vorrebbe un numero di binomj doppio di quello s'è usato qui sopra, cioè, ove il numero de' fattori sieno soli cinque, vi vorrebbe più d'un milione di termini, e per otto fattori, più di settanta mila milioni di milioni di termini.

64. Io mi sono trovato in questo labirinto di difficoltà, e dopo lungo andare mi sembravano inestricabili; mi son dovuto raggirare, ed arrampicare quà, e là con una quantità prodigiosa di lunghissimi, e noiosissimi calcoli. Ma al fine ho travisto, e poscia ho dedotto da me il teorema generale posto al num. 51.; devo però confessare d'essermi, dopo tutto ciò, servito di molti lumi comunicatimi dal P. Boscovich per rendere più spediti agli altri i medesimi calcoli, per conoscere la legge, che osservano i termini nell' elidersi, e per isvolgere i principj, da' quali dipende la generale, e rigorosa dimostrazione.

65. Mi restano ad aggiungere quattro avvertenze. 1.º Non ha luogo il metodo esposto quando nel denominatore della data frazione vi entrino due, o più fattori eguali; dacchè tra i binomj de' denominatori v'entrerebbe anche lo zero.

2.º In questi casi si consideri la data frazione, come se avesse un

un solo di que' fattori eguali al denominatore; si spezzi la data frazione, così considerata, col metodo spiegato, e si moltiplichino i denominatori delle spezzate per il prodotto de' denominatori ommessi.

3.º Se uno, o più fattori del dato denominatore sono complessi, $P, P', P'' \dots$ ec., si faccia nelle formole del num. 51. $x = P, y = P' \dots$ ec., e l'operazione farà la stessa.

4.º Il maggior uso di questo problema è ne' casi, in cui i fattori complessi sono composti di una stessa variabile con una costante diversa, della forma $x+a, x+b, x+c \dots$ ec., perchè allora tutti i binomj, che accompagnano ogni fattore nella frazione spezzata sono composti di quantità costanti, restando così in ciascuna frazione la quantità variabile elevata alla prima sola potenza.

Evoluzione delle frazioni continue.

66. **S**I chiama frazione continua quella frazione, il cui denominatore è formato da una quantità intera, e da una frazione, il cui denominatore è di bel nuovo composto da una intera quantità, e da una frazione, il cui denominatore ec. Aggiungendo a tutte le frazioni continue una quantità qualunque a , si avrà la forma seguente

$$a + \frac{a'}{b + \frac{b'}{c + \frac{c'}{d + \frac{d'}{e + \frac{e'}{\dots \text{ec.} \dots \text{ec.}}}}}}}$$

67. E' evidente, che

$$\begin{aligned}
 a &= a \\
 a + \frac{a'}{b} &= \frac{ab + a'}{b} \\
 a + \frac{a'}{b + \frac{b'}{c}} &= \frac{abc + ab' + a'c}{bc + b'} \\
 \dots \dots \text{ec.}
 \end{aligned}$$

Le frazioni, che formano il secondo membro di queste equazioni, si chiamano frazioni *equivalenti*, cioè equivalgono alle frazioni, che formano il membro primo; ed è evidente, che qualunque termine d'una frazione equivalente è eguale alla somma de' termini analogi delle due precedenti, ciascuno moltiplicato per una nuova lettera; cioè, a cagione d'esempio, il numeratore $abc + ab' + a'c$ della terza è eguale ai numeratori della seconda, e della prima, moltiplicati, quello per c , e questo per b' .

Da questo teorema applicato a diverse frazioni equivalenti, si ha un metodo facile per trasformare in una serie, qualunque frazione continua, che è il problema diretto.

68. Si dispongano le frazioni equivalenti, trovate come al num. precedente, in una serie da sinistra a destra, che incominci da a^0 ; sopra ciascun termine di questa serie si scriva, a modo d'esponente, l'ultimo denominatore della frazione corrispondente al termine seguente, e sotto il termine medesimo si scriva l'ultimo numeratore della stessa corrispondente frazione; si avrà per l'esempio addotto

$$\begin{array}{cccc}
 a & b & c & d \\
 a^0 & \frac{a}{1} & \frac{ab + a'}{b} & \frac{abc + ab' + a'c}{bc + b'} \dots \text{ec.} \\
 a' & b' & c' & d'
 \end{array}$$

Per

Per trovare generalmente il termine R di questa serie; siano $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ i due termini, che immediatamente precedono l' R cercato verso la sinistra, e sia p' l'indice inferiore dell'ultimo precedente $\frac{P}{P'}$, e q l'indice superiore del primo precedente $\frac{Q}{Q'}$; sarà

$$R = \frac{qQ + p'P}{qQ' + p'P'}$$

69. Si noti; 1.º Che s'è incominciata la serie di mezzo da a^0 , perchè la formola R rappresentasse anche la frazione equivalente ad $a + \frac{a'}{b}$.

2.º Che essendo sempre dati i primi due termini a^0 , a della serie di mezzo, e tutti gli esponenti, si determineranno colla formola precedente tutti i termini R .

3.º Che determinando tutti gli R fino ad avere impiegato l'ultimo de' dati esponenti, ossia quello, che sta più a destra, l' R , che gli corrisponderà, esprimerà il vero valore esatto della data frazione x , e gli altri R esprimeranno solamente un valore di x approssimato.

4.º Che chiamando R' il secondo termine a della serie di mezzo, andando verso la destra, R'' il terzo, R''' il quarto, ... ec. si ha R' minore di x , R'' maggiore di x , R''' minore di x , ... ec., e così alternativamente, come è manifesto dalla volgare teoria delle frazioni; cosicchè in generale, gli R che hanno un numero pari d'accenti sono maggiori della data frazione, e gli R , che hanno un numero impari d'accenti sono minori della medesima.

70. Quindi finalmente; in qualunque frazione continua x , si ha

$$x = R' + (R'' - R') - (R''' - R'') + (R^{IV} - R''') - (R^{V} - R^{IV}) + \dots \text{ec.}$$

A a

71. Rella

71. Resta a cercarsi una regola sicura per continuare all'infinito, senza pericolo d'errare, la serie, che esprime il valore d' x al num. 70. Eccone una assai comoda: Si scrivano in una serie gli R minori di x , e sopra questa, tra gli intervalli della serie già scritta, si collochino gli R maggiori di x , nel modo seguente:

per gli R maggiori di x R^{II} R^{IV} R^{VI} R^{VIII} ec.
 per gli R minori di x R^I R^{III} R^V R^{VII} R^X ec.
 gli R della serie superiore sono i *minuendi*, gli R della serie inferiore sono i *minutori*; ciascun R della serie superiore va combinato coi due, che gli stanno a lato nella inferiore; l' R^{II} va combinato coll' R^I e coll' R^{III} ec., e così nel resto; ciascuna di queste combinazioni va fatta col segno — posto avanti gli R d'accenti impari, e forma un termine della serie cercata, da unirsi agli altri, o col +, o col —, secondo, che porta l'alternazione de' segni, che deve regnare dopo il primo positivo, nella serie x .

72. Sostituendo adunque nella formola del num. 70. i valori di R presi dalla frazione data al num. 66., si ha la serie

$$a + \frac{a'}{b} - \frac{a' b'}{b(b c + b')} + \frac{a' b' c'}{(b c + b')(b c d + b' d + c' d)} - \dots \text{ ec.,}$$

che corrisponde a quella frazione, e facendo nella frazione medesima $a = 0$, perchè essa rappresenti le pure frazioni continue, si avrà la serie $\frac{a'}{b} - \frac{a' b'}{b(b c + b')} + \dots \text{ ec.,}$ che le corrisponde;

finalmente se gli a' , b' , c' , d' ec., cioè i numeratori d'una data frazione continua siano quantità sempre costanti (a cagione d'esempio tante unità), ed a , coi denominatori b , c , d ec. della frazione medesima siano numeri interi positivi, la serie che gli corrisponderà sarà con pochi termini convergentissima al valor vero; in ogni caso però si interromperà la serie semprechè la data frazione non anderà all'infinito.

73. Passiamo al problema inverso delle frazioni continue, cioè a trasformare una data serie in una frazione continua. A questo servirà di formola ecumenica la formola del num. precedente, e la frazione corrispondente del num. 66. Si proceda così.

- 1.° Si assumano ad arbitrio i numeratori, o i denominatori della frazione continua, che si cerca: Noi qui supporremo affutti i denominatori a , b , c , d ... ec.
- 2.° Si paragoni termine per termine la serie data colla serie del num. precedente; si avranno tante equazioni quanti sono termini della data serie.
- 3.° Con queste si determinino i numeratori a' , b' , c' ... ec. (se si fossero affutti questi, si determinerebbero i denominatori a , b , c ... ec.); cioè si esprimano i loro valori per mezzo delle lettere affutte, e de' termini della serie data.
- 4.° Si sostituiscano questi valori nella frazione del num. 66.

74. Applichiamo il metodo a qualche esempio. Sia data la serie

$$x = A - B + C - D + E - \dots \text{ ec.,}$$

che per cominciare con un solo termine positivo farà rappresentata dalla serie

$$x = \frac{a'}{b} - \frac{a' b'}{b(b c + b')} + \dots \text{ ec.}$$

Sarà	Quindi
$A = \frac{a'}{b}$	$A = \frac{a'}{b}$
$B = \frac{a' b'}{b(b c + b')}$	$\frac{B}{A} = \frac{b'}{b c + b'}$
$C = \frac{a' b' c'}{(b c + b')(b c d + b' d + c' d)}$	$\frac{C}{B} = \frac{c' b}{b c d + b' d + c' b}$
$D = \dots \text{ ec.}$	$\frac{D}{C} = \dots \text{ ec.}$

Cioè

$$a' = Ab$$

$$b' = \frac{Bbc}{A-B}$$

$$c' = \frac{Cd(bc+b')}{b(B-C)}$$

$$d' = \frac{De(bc d + b' d + c' b)}{(bc + b')(C-D)}$$

.... ec.

e finalmente

$$a' = Ab$$

$$b' = \frac{Bbc}{A-B}$$

$$c' = \frac{ACcd}{(A-B)(B-C)}$$

$$d' = \frac{BDde}{(B-C)(C-D)}$$

.... ec.

75. Sia data la serie

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + \dots \text{ ec.}$$

Si avrà collo stesso metodo

$$a' = \frac{b}{A}$$

$$b' = \frac{Abc}{B-A}$$

..... ec.

$$c' = \frac{B^2 cd}{(B-A)(C-B)}$$

$$d' = \frac{C^2 de}{(C-B)(D-C)}$$

76. Sia data la serie

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{AB} + \frac{1}{ABC} - \frac{1}{ABCD} + \dots \text{ ec.}$$

Sarà $a' = \frac{b}{A}$

$$b' = \frac{bc}{B-1}$$

..... ec.

$$c' = \frac{Bcd}{(B-1)(C-1)}$$

$$d' = \frac{Cde}{(C-1)(D-1)}$$

77. Sia

77. Sia data la serie

$$x = A - Bz + Cz^2 - Dz^3 + \dots \text{ ec.}$$

Sarà $a' = Ab$

$$b' = \frac{Bbcz}{A-Bz}$$

..... ec.

$$c' = \frac{ACcdz}{(A-Bz)(B-Cz)}$$

$$d' = \frac{BDdez}{(B-Cz)(C-Dz)}$$

78. Determinati così i valori de' numeratori, converrà prima di fare le sostituzioni nella formola del num. 66. determinare ad arbitrio i valori de' denominatori $a, b, c, d \dots$ ec.; Ma perchè la forma della frazione sia più spedita, farà bene assumergli tali, che essendo essi numeri interi, esprimano in numeri interi anche i numeratori; questo però dipende altresì dalla natura de' termini della data serie.

Si faccia, a cagione d'esempio,

al num. 74. $b = 1$

$$c = A - B$$

$$d = B - C$$

$$e = C - D$$

$$f = \dots \text{ ec.}$$

e, fatte le Sostituzioni, si avrà

$$x = \frac{A}{1 + \frac{B}{(A-B) + \frac{AC}{(B-C) + \frac{BD}{(C-D) + \frac{CE}{(D-E) + \dots \text{ ec.}}}}}$$

al

al num. 75..... $b = A$
 $c = B - A$
 $d = C - B$
 $e = D - C$
 $f = \dots ec.$
 e si avrà

$$x = \frac{1}{A + \frac{1}{(B-A) + \frac{1}{(C-B) + \frac{1}{(D-C) + \dots ec.}}}}$$

così pure al num. 76., fatto $b = A$ ed al num. 77. $b = 1$

$c = B - 1$	$c = A - Bz$
$d = C - 1$	$d = B - Cz$
$e = D - 1$	$e = C - Dz$
$f = \dots ec.$	$f = \dots ec.$

Si determinerà come sopra la frazione x .

79. Si noti per ultimo, che si può cambiare in frazione continua qualunque frazione, o volgare essa sia, o decimale espressa a modo delle volgari. Sia A il numeratore, e B il denominatore della data frazione; ed usando il metodo del num. 86. dell'Introduzione per avere il comune divisore di due quantità,

Sia

Sia $\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}$

$\frac{B}{C} = b + \frac{D}{C} \dots$ donde $\dots \frac{C}{B} = \frac{1}{b + \frac{D}{C}}$

$\frac{C}{D} = c + \frac{E}{D} \dots \dots \dots \frac{D}{C} = \frac{1}{c + \frac{E}{D}}$

$\dots ec. \dots ec.$

quindi $\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B} = a + \frac{1}{b + \frac{D}{C}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{E}{D}}} = \dots ec.$

cosicchè chiamando $a, b, c, d \dots ec.$ i quoti interi, e trovati

col metodo accennato, si avrà $x = \frac{A}{B}$

$$= a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \dots ec.}}}}$$

80. Per dare un esempio di questo metodo, egli è noto, che se si concepisca distesa in lungo la semiperiferia d'un circolo qualunque, essa paragonata al raggio, che la ha descritta, si troverà prossimamente tripla del raggio medesimo, cioè la lunghezza del raggio sta alla lunghezza della semiperiferia prossimamente come l'unità a 3. Questa ragione del raggio r preso per unità alla lunghezza della semiperiferia si esprime più esattamente, come l'unità al numero

3, 14159265358979323846264338327950288419716939937510
 5820974944592307816406286208998628034825342211706798
 21480865132723066470938446 . . . ec. = p .

Si tratti ora d'esprimere la ragione di p ad r con numeri così piccoli, che non se ne possa avere una più accurata, se non usando numeri molto maggiori. Ognun vede, che basta mutare in una frazione continua il dato numero decimale p , ed una delle frazioni equivalenti farà la frazione, o la ragione cercata. In questa sorte di problemi quanto più i termini della data ragione son grandi, tanto più sarà accurata la determinazione; ma nell'esempio nostro sarebbe impraticabile il calcolo, se si volessero usare tutte le 129 figure, che danno quel prossimissimo valore di p . Determinando la frazione continua corrispondente alle trentadue prime figure, si troveranno i quoti

$$3 \cdot 7 \cdot 15 \cdot 1 \cdot 292 \dots \text{ec.}$$

e le frazioni equivalenti formeranno la serie, contata dopo l'2° del num. 68.

$$\frac{3}{1} \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{333}{106} \cdot \frac{355}{113} \cdot \frac{102093}{33102} \dots \text{ec.}$$

La prima frazione mostra, che $p:r::3:1$, nè si può più accuratamente esprimere in numeri non maggiori la ragione di p ad r ; la seconda frazione da $p:r:22:7$, che è la ragione *Archimedeo*; e la quarta frazione da $p:r::355:113$, che è la ragione

Mezziana maggiore della vera meno di $\frac{1}{113 \times 3302}$; tutte

poi le ragioni espresse coi termini trovati sono alternativamente minori, e maggiori della vera, la prima è minore, la seconda è maggiore, la terza è minore, la quarta maggiore... ec., come abbiamo già notato sopra.

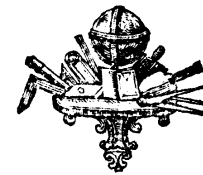
81. Si

81. Si facciano le stesse riflessioni sulla frazione 0, 0002908820866572... ec., e su 206264, 7887323... ec.

La prima frazione esprime la lunghezza d'un arco circolare d'un minuto primo, ed è cavata dalla seguente analogia: la semiperiferia sta all' arco d'un minuto primo, come p sta al quarto; La seconda frazione esprime il numero de' secondi, che comprenderebbe il raggio d'un circolo, se esso fosse curvato in arco sulla periferia del circolo medesimo, ed è dedotta dalla seguente analogia, come p sta ad r , così la semiperiferia espressa in secondi ec. (cioè 648000 secondi) sta al quarto termine. Colla prima frazione si ha facilmente la lunghezza d'un arco qualunque; basta moltiplicare per quella il numero de' primi minuti; de' quali è composto l'arco dato. Colla seconda frazione si ha facilmente l'arco, che corrisponde a qualunque (per parlare cogli Astronomi) funzione circolare, espressa in parti del raggio; basta moltiplicare per quella frazione la funzione data.

Si noti 1.º Che per avere la seconda frazione s'è usata la ragione Mezziana della semiperiferia al raggio.

2.º Che riducendo la seconda frazione a' gradi, si vede, che il raggio è eguale a 57 gradi, 17 minuti, e 44, 8 secondi prossimamente. Queste cose siano qui dette di passaggio, e per esercizio di calcolo sulle frazioni continue.



B b

CAPO

CAPO TERZO.

Della Sommazione delle serie, e del loro termine generale.



Classi diverse, ed espressioni generali delle serie.

82. **N**E' due precedenti capi s'è data una sufficiente idea delle serie, che nascono dalla Evoluzione delle quantità algebriche; non ci resta altro a fare per una compiuta trattazione delle serie, che mostrare il metodo per trovare, data una serie, il suo termine generale, e dato, o trovato il termine generale, trovare la generale somma della medesima. E' però da saperfi avanti ogn'altra cosa; 1.^o Che dagli Annalisti si chiama *funzione* d'una quantità, qualunque algebrica espressione comunque composta da quella, e da altre quantità, o date, o prese ad arbitrio; così $a + 3x$, $a + 4x$, $a x + b \sqrt{a^2 - x^2}$ sono funzioni di x .

2.^o Che per *termine generale* d'una serie intendiamo qui una funzione di m tale, che se invece di m vi si sostituiscano successivamente i termini $1 . 2 . 3 \dots m$ della serie naturale, si avrà successivamente il primo, il secondo, il terzo, l' m^{esimo} termine della serie data.

3.^o Che *somma generale* d'una serie, significa parimenti una funzione di m tale, che se invece di m vi si sostituiscano successivamente i termini $2 . 3 \dots m$ della serie naturale, si avrà successivamente la somma de' primi due, de' primi tre, de' termini m della serie data.

83. Ciò supposto: Convieni distinguere le serie sommabili dalle non sommabili; dacchè d'infinita serie non si può trovare

la

la somma esatta, ma solo per approssimazione; queste richiedono un trattato a parte, e si conoscerà quali esse sieno dal non poterfi col metodo, che esporrò, trovare la loro somma vera. Quanto alle serie sommabili, a tre classi, o generi si riducono quelle, che più comunemente sono usate ne' calcoli.

Il primo genere comprende tutte le serie, chiamate *aritmetiche* per l'analogia, che esse hanno nella loro formazione, colle progressioni aritmetiche; il secondo genere comprende tutte le serie, chiamate *geometriche* per l'analogia, che esse hanno nella loro formazione, colle geometriche progressioni; il terzo comprende tutte quelle, che nascono dalla composizione delle serie, che appartengono agli altri due.

84. Se una data serie sia tale, che, scritti i suoi termini, cominciando dal minimo, uno sotto l'altro in una colonna verticale A , le differenze de' suoi termini, scritte in una colonna B accanto alla prima, siano costanti, quella serie, come è noto, si chiama *progressione aritmetica*. Quindi hanno tratto il nome di serie aritmetiche quelle serie, in cui non le differenze di A scritte in B , ma le differenze di B scritte in C , o quelle di C scritte in D , o... ec. sieno costanti; e chiamando serie aritmetiche di primo ordine le semplici progressioni aritmetiche, si sono chiamate serie aritmetiche di secondo, di terzo, di quarto... ordine le altre serie, secondochè esse avranno le differenze costanti in C , in D , in E ... ec. Le differenze scritte in B si chiamano *differenze prime*, e quelle scritte in C , in D , in E ... ec. si chiamano *differenze seconde, terze*... ec. della serie A . Onde le serie, che hanno le differenze n^{esimo} costanti, sono serie aritmetiche di ordine n^{esimo} .

85. E' evidente, che la serie $1 . 2 . 3 \dots m$ è una serie aritmetica di primo ordine; che le potenze seconde di m formano una serie aritmetica di secondo ordine, le terze di m formano una serie aritmetica di terzo ordine; ed in generale, che

B b 2

le

le potenze n di m formano una serie aritmetica di ordine n .
 O più generalmente ancora Bm rappresenta un termine qualunque delle serie aritmetiche di primo ordine, Cm^2 rappresenta le serie aritmetiche di secondo ordine, Dm^3 quelle di terzo, e Tm^n quelle d'ordine n ; e per maggiore generalità ancora, si potrà aggiungere a ciascuna di queste serie un termine della serie costante A .

86. Quindi $A + Bm + Cm^2 + Dm^3 + \dots + Tm^n$ rappresenta successivamente tutte le serie aritmetiche fino all'ordine n ; cioè i primi due termini $A + Bm$ rappresenta le serie aritmetiche di primo ordine; i primi tre quelle di secondo ordine; e così nel resto.

87. Le serie geometriche sono serie di numeri formate dall'addizione de' termini analogi di più progressioni geometriche; e chiamando serie geometriche del primo ordine le semplici progressioni geometriche, le serie formate dall'addizione de' termini analogi di due, di tre, di quattro, di n progressioni geometriche, faranno serie geometriche di secondo, di terzo, di n ordine.

88. Se H, I, K, \dots ec. rappresentino ciascuno un dato diverso numero, è noto, che ciascuno de' H^m, I^m, K^m, \dots ec. rappresenterà una progressione geometrica d'esponente m , formata da' rispettivi loro numeri presi per base della progressione; e più generalmente rappresenteranno qualunque progressione geometrica, se ciascuna di queste formole si moltiplicheranno per una indeterminata; cioè AH^m, BI^m, CK^m, \dots ec. faranno le espressioni di diverse progressioni geometriche, cioè rappresenteranno indeterminatamente qualunque termine m di diverse progressioni geometriche.

89. Quindi $AH^m + BI^m + CK^m + \dots$ ec. rappresenta successivamente con termini n le serie geometriche d'ordine n ; cioè il primo termine AH^m rappresenta le serie geometriche di primo

ordine, i primi due termini $AH^m + BI^m$ rappresenta le serie geometriche del secondo ordine, e così nel resto.

90. E' manifesto, che $(A + Bm + Cm^2 + \dots + Tm^n) H^m$ comprende un'infinità di serie del terzo genere, cioè composte di serie aritmetiche all'infinito diverse, e di qualunque serie geometrica; queste serie si chiama no *aritmetico geometriche*, e l'esponente del loro ordine, è la somma degli esponenti dell'ordine delle due serie. E' facile quindi a formarli idea delle altre serie di terzo genere, infinitamente diverse all'infinito.

91. Il celebre Moivre chiama serie *ricorrenti* tutte le serie, i termini delle quali sono formati da' termini precedenti moltiplicati rispettivamente da quantità costanti. Di questa natura sono le serie, di cui abbiamo dato fin qui gl'indeterminati termini generali; ci farà assai utile nel decorso la dimostrazione di questo teorema.

92. Dico adunque in primo luogo, che le serie aritmetiche sono serie ricorrenti. Se $A + B + C + D + \dots + T$ sia una serie aritmetica di primo ordine, che ha $A + Bm$ per termine generale, farà

$$\begin{aligned} C &= 2B - A \\ D &= 2C - B \\ E &= 2D - C \\ F &= 2E - D \\ &\dots \text{ ec.} \end{aligned}$$

Se sia una serie aritmetica di secondo ordine, che ha termine generale $A + Bm + Cm^2$, farà

$$\begin{aligned} D &= 3C - 3B + A \\ E &= 3D - 3C + B \\ F &= 3E - 3D + C \\ &\dots \text{ ec.} \end{aligned}$$

Se sia una serie aritmetica di terzo ordine, che ha per termine generale $A + Bm + Cm^2 + Dm^3$, sarà

$$E = 4D - 6C + 4B - A$$

$$F = 4E - 6D + 4C - B$$

$$G = 4F - 6E + 4D - C$$

$$H = 4G - 6F + 4E - D$$

.... ec.

Ed in generale, le serie aritmetiche di ordine n sono serie ricorrenti di ordine $n + 1$. Per avere generalmente il termine T , per qualunque ordine n di serie aritmetiche, si scelgano i coefficienti s, r, q, p, \dots ec. per la potenza $n + 1$ del binomio $a + b$, ommesso il primo degli estremi, e si prendano termini $n + 1$ nella formola $T = sS - rR + qQ - pP + \dots$ ec.

93. Dico in secondo luogo, che le serie geometriche sono serie ricorrenti. Se $A + B + C + D + \dots + T$, sia una serie geometrica di primo ordine, che ha per termine generale AH^n , fatto $H = s$, sarà $T = sS$.

Se sia una serie geometrica di secondo ordine, che ha per termine generale $AH^m + BI^n$,

$$\text{fatto } H + I = s$$

$$HI = r$$

$$\text{sarà } T = sS - rR$$

Se sia una serie geometrica di terz'ordine, che ha per termine generale $AH^m + BI^n + CK^m$,

$$\text{fatto } H + I + K = s$$

$$+ HI + HK + IK = r$$

$$+ HIK = q$$

$$\text{sarà, alternando i segni, } T = sS - rR + qQ$$

Ed in generale le serie geometriche d'ordine n , sono serie ricorrenti del medesimo ordine. Per avere generalmente il T per qualunque ordine n di serie geometriche, si chiami s la somma di tutti i H, I, K, L, M, N, \dots ec.; si chiami r la somma di tutti

tutti i binari de' medesimi; q la somma di tutti i ternarij....., e così nel resto, sarà, alternando i segni,

$$T = sS - rR + qQ - pP + \dots \text{ ec.}$$

94. Dico finalmente, che le serie Algebraico-geometriche sono serie ricorrenti.

Se $A + B + C + D + \dots + T$ sia una serie Algebraico-geometrica di ordine n , si avrà per il T la stessa formola del num. 92., con questo solo divario, che il termine m^{esimo} della medesima è moltiplicato per H^n .

95. Non m'è ignoto, che si può determinare il termine T d'una serie ricorrente d'ordine n con soli $n - 1$ termini precedenti. Vedi Eulero num. 227..... 230. Tom. 1. della più volte citata Introduzione; ma ciò non è contrario alla generale definizione, che l'ordine delle serie ricorrenti sia il numero de' termini precedenti, che determinano il seguente; al più si potrà dire, che la stessa serie può considerarsi come ricorrente d'ordine n , e d'ordine $n - 1$.

96. Tutte quasi le serie, che abbiamo dedotte ne' due precedenti capi sono serie ricorrenti di qualche ordine. Noi abbiamo ivi assegnata la legge di dipendenza d'un termine qualunque dagli altri; Si noti, che alcune di quelle serie con qualche trasformazione si riducono a serie ricorrenti aritmetiche. A cagione d'esempio, nel capo secondo (num. 42.) per le frazioni, che hanno al denominatore una quantità della forma $(r - ix)^m + 1$, fatto $i = 1$, ed $x = r$, si avrà una serie della forma seguente

Se $m = 1$, si avrà

$$b + (b + a) + (b + 2a) + (b + 3a) + \dots \text{ ec.}$$

Se $m = 2$, si avrà

$$c + (c + b) + (c + 2b + a) + (c + 3b + 3a) + \dots \text{ ec.}$$

Se $m = 3$, si avrà

$$d + (d + c) + (d + 2c + b) + (d + 3c + 3b + a) + \dots \text{ ec.}$$

Se $m = 4$, si avrà

$$\dots \text{ ec.}$$

La prima di queste serie rappresenta generalmente tutte le serie aritmetiche di primo ordine; la seconda rappresenta quelle di secondo ordine... la n^{esima} rappresenta quelle di ordine n .

97. Si noti di passaggio, che nelle serie precedenti, a indica l'ultima differenza, che è costante; b indica la prima delle penultime; c la prima delle antipenultime... ec., come si fa manifesto dal prendere coll'ordine detto al num. 84. le differenze de' loro termini: A cagione d'esempio per la seconda serie, si avrà

A	B	C
c		
.....	b	
$c + b$	a
.....	$b + a$	
$c + 2b + a$	a
.....	$b + 2a$	
$c + 3b + 3a$	
... ec.	... ec.	

Trovare la somma, ed il termine generale delle serie, secondo il metodo del P. Riccati.

98. Nel cercare la somma, ed il termine generale delle serie, mi sono appigliato al metodo, che il P. Riccati ha così elegantemente esposto nel suo tanto insigne Commentario de seriebus recipientibus summam Algebraicam, aut exponentialem. Ho trovato vero in pratica, cioè, che il suo metodo determina tutte le serie proposte da' più celebri Autori, che hanno trattata questa materia, ed all'incontro si determinano col metodo medesimo molte altre serie, delle quali non si saprebbe trovare la somma coi metodi altrui. Vedi Eulero, Mayer, Stirling, ec. Sta-

Stabilito, che avrò l'universale principio del P. Riccati, discenderò ad applicare il suo metodo alle serie aritmetiche, quindi alle geometriche, e finalmente alle serie composte di amendue.

99. Il principale artificio del P. Riccati è di assumere varie formole, che indeterminatamente rappresentino le somme generali delle serie, e dalla loro contemplazione dedurne le condizioni, che devono avere i loro termini generali, perchè da essi si possa rimontare alle somme cercate. Mette egli per base di tutte le sublimi sue inquisizioni il seguente semplicissimo teorema: In qualunque serie il termine generale è eguale alla somma di tutti i termini fino ad m inclusive, meno la somma di tutti i termini, inclusivamente fino al termine $m - 1$; cioè chiamando T il termine m^{esimo} , S la somma de' termini m , ed s la somma de' termini $m - 1$, si ha $T = S - s$.

100. Si noti: 1.º Che quantunque sia $T = S - s$, se si trovi $T = A - a$, non si dovrà perciò conchiudere, che A sia la vera somma, o che sia $A = S$, comunque A , ed a siano fun-

zioni di m ; così si ha $\frac{6m-5}{2} = \frac{3m^2-1}{2} - \frac{3(m-1)^2-1}{2}$,

eppure $\frac{3m^2-1}{2}$ non è la somma della serie, che ha $\frac{6m-5}{2}$ per ter-

mine generale.

2.º Si può facilmente conoscere, se A è la vera somma, anzi facilmente si può ridurre A ad essere la vera somma, quando nol sia. Si faccia $m = 1$ tanto in T , quanto in A , cosicchè s'abbia T' , ed A' ; Se $T' - A' = 0$, farà $A = S$. Se $T' - A' = b$,

farà $A + b = S$; nel precedente esempio si ha $T' = \frac{3}{2}$, ed $A' = 1$;

donde $S = \frac{3m^2-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3m^2}{2}$.

3.º Finchè il T ha la forma di $S - s$, la formola non può servire all'uso, dacchè venendo s dalla sostituzione di $m - 1$ invece di m in S , la serie formata da T farà composta di due, ed il termine m^{esimo} della prima eliderà il termine $(m + 1)^{esimo}$ della seconda; onde non rimarrà, che l'ultimo termine della prima serie meno il primo termine della seconda; cioè che ciascuno potrà vedere formando la serie, che ha per somma $\frac{m}{2 + m}$, fatto

$$T = S - s = \frac{m}{2 + m} - \frac{m - 1}{1 + m}.$$

101. Posti questi principj prendiamo col P. Riccati ad esaminare la seguente formola $S = Am + Bm^2 + Cm^3 \dots$ ec.
1.º Se $S = Am$, mettendo $m - 1$ invece di m in S , si ha $s = A(m - 1)$, e pel teorema $T = S - s = A$; ognun vede, che non entrando l' m in questo termine generale, egli rappresenterà una serie di quantità costanti $A, A, A \dots$ ec., la somma della quale è lo stesso Am .

2.º Se $S = Am + Bm^2$, mettendo $m - 1$ invece di m in S , si avrà

$$s = -A + Am + B - 2Bm + Bm^2;$$

e, pel teorema, farà $T = A$

$$-B + 2Bm$$

Formando la serie corrispondente a questo T colla sostituzione di $1; 2; 3 \dots$ ec. invece di m , si ha $A + B; A + 3B; A + 5B; \dots$ ec., che è una progressione aritmetica di differenza costante $2B$, o una serie aritmetica di primo ordine; dunque

$A - B + 2Bm$ è la forma, che deve avere il termine generale di questa serie, perchè la loro somma sia rappresentata da S ; cioè deve contenere una parte costante $A - B$, ed un'altra $2Bm$ moltiplicata per m lineare; allora $Am + Bm^2$ rappresenterà la

loro

loro somma; e di più, se un dato termine generale abbia la forma del nostro, paragonando la parte costante con $A - B$, e la parte moltiplicata per m con $2Bm$, si determineranno gli A, B da sostituirsi in S per avere la somma vera. Anzi data una serie aritmetica di primo ordine, supponendo eguale il primo suo termine ad $\frac{+A}{-B + 2B}$, (posto $m = 1$), ed il secondo della serie al medesimo $\frac{+A}{-B + 2Bm}$, (fatto $m = 2$), si avranno tante equazioni quante indeterminate, ed i loro valori sostituiti in S, T , daranno la somma vera, ed il vero termine generale della data serie.

3.º Se $S = Am + Bm^2 + Cm^3$; allo stesso modo colla sostituzione di $m - 1$ invece di m in S , si avrà

$$T = A - B + 2Bm + C - 3Cm + 3Cm^2;$$

; e determinando

la serie di questo T , si avrà $A + B + C; A + 3B + 7C; A + 5B + 19C; \dots$ ec., che è una serie aritmetica di second'ordine, che ha la seconda differenza costante $6C$; dunque la forma del nuovo T è la forma, che deve avere il termine generale di queste serie, perchè il primo S rappresenti la loro somma; e di più, se un dato termine generale avrà la predetta forma, cioè una parte $A - B + C$ costante, una parte distinta da m , come $2Bm - 3Cm$, ed una terza parte $3Cm^2$ distinta da m^2 ; colle equazioni formate dal paragone rispettivo di queste tre parti, si determineranno gli A, B, C da sostituirsi in S per avere la somma, che corrisponde al dato T . Anzi data una serie aritmetica di second'ordine, paragonando il primo termine della data serie con questo T (in cui si faccia $m = 1$), il secondo della serie col T (supposto $m = 2$), il terzo della serie col medesimo T (posto $m = 3$), si avranno tante equazioni, quante

C c 2

ne

ne abbisognano per determinare gli A, B, C da sostituirsi in T , ed S per avere la somma, ed il termine generale della serie proposta.

4.^o Collo stesso discorso, considerando quattro, cinque . . . termini di quel primo S della formola, si determineranno le condizioni, che devono avere i termini generali, perchè da quegli S siano rappresentate le somme delle loro serie, e si dedurrà il metodo per avere la somma, ed il termine generale delle serie di differenze terze, quarte . . . costanti.

102. Quindi si può dire generalmente, che le serie ricorrenti aritmetiche d'ordine n hanno per termine generale una funzione di m , in cui m èalzata alla potenza n ; e che le serie, il cui termine generale è una funzione di m , nella quale m è alzata alla potenza n , ha per somma generale una funzione di m , che ha per esponente massimo $n + 1$. Da queste due considerazioni si ha un metodo universale, e facile per la pratica.

1.^o Data una serie, in cui la differenza $n^{e^{im}}$ è costante, trovare il termine generale della medesima. Si prenda indeterminatamente $T = A + Bm + Cm^2 + Dm^3 + \dots + Lm^n$; fatto m successivamente eguale ad 1; 2; 3; . . . ec., si paragoni successivamente l'indeterminato T col primo, secondo, terzo . . . termine della data serie, fino ad avere tante equazioni, quante sono le indeterminate in T ; si sostituiscano i valori di A, B, C . . . dedotti da queste equazioni, in T .

2.^o Dato (o trovato) il termine generale d'una serie di differenza $n^{e^{im}}$ costante, trovare la somma generale della medesima. Si prenda indeterminatamente $S = Am + Bm^2 + Cm^3 + \dots + Lm^{n+1}$; si determini colla sostituzione di $m - 1$ invece di m un nuovo valore $T = S - s$; col paragone delle parti di questo T colle parti rispettive del dato termine, si avranno tante equazioni, quante sono le indeterminate in T , ed i loro valori so-

sti-

stituiti in S , daranno la somma generale della serie, di cui si suppone dato il termine generale.

103. Quanto alle serie ricorrenti geometriche, si consideri la formola $S = AH^m - A$; sostituito $m - 1$ invece di m , si ha

$$s = AH^{m-1} - A$$

$$\text{dovendo } T = S - s = (AH^m - A) - (AH^{m-1} - A)$$

$$= \frac{A \cdot H - 1}{H} H^m.$$

Se H fosse minore dell'unità, si dovrebbe al solito, mutare il segno d'uno de' fattori. Ognun vede, che questo termine generale ci dà una serie geometrica di primo ordine, e che perciò quando il termine generale dato sia composto d'un fattore della forma H^m , e di un altro della forma $\frac{A \cdot H - 1}{H}$, esso appartiene

ad una serie geometrica di primo ordine. Paragonando i dati fattori componenti coi nostri indeterminati, si avrà il valore di A, H da sostituirsi in S : Così pure, se data la serie geometrica, si cerchi il termine generale, paragonando l'indeterminato T coi primi due termini della data serie, si avrà il valore di A, H , da sostituirsi in T .

104. Per le serie geometriche di grado più elevato del primo, si è già notato, che esse sono un aggregato di serie geometriche di primo ordine; Onde 1.^o Date le serie componenti, la somma de' loro termini generali farà il termine generale della composta.

2.^o Dato il termine generale della composta, la somma delle somme generali delle sue parti (che sono i termini generali delle serie componenti) farà la somma generale della medesima.

105. Si dica lo stesso per le serie ricorrenti aritmetico-geometriche, adoperando la somma, o la moltiplicazione delle par-

ti

ti de' termini, e delle somme generali, secondocchè esse sono formate colla somma, o colla moltiplicazione di più serie componenti.

106. Resta a darci un metodo per trovare il termine generale per le serie ricorrenti geometriche, ed aritmetico-geometriche data la legge della serie. 1.º Si dà la legge delle serie ricorrenti geometriche, quando si danno i moltiplicatori de' termini precedenti al T cercato, ed, essendo questi moltiplicatori la somma s , i prodotti a due, a due r , i prodotti a tre, a tre $q \dots$ ec. degli $H, I, K, L \dots$ ec., che entrano a formare il termine generale $T = AH^m + BI^m + DK^m + \dots$ ec., si riduce la questione, a sapere separare da quei prodotti $s, r, q \dots$ ec. le quantità $H, I, K, L \dots$ ec. da sostituirsi in T . Questo però è il notissimo problema dell'Analisi Cartesiana sciolto da noi in tutta la sua generalità nell'introduzione, e nel capo primo di questo secondo libro. Si chiami x il valore di ciascuna di quelle lettere, m in numero; se la somma di questi x è s , e quella de' loro binarj, ternarj sia $r, q, p \dots$ ec., farà per il num. 101.

$$x^m - s x^{m-1} + r x^{m-2} - q x^{m-3} + p x^{m-4} - \dots \text{ ec.} = 0,$$

e le radici di questa equazione faranno i valori cercati.

2.º Per le serie aritmetico-geometriche, si chiamino allo stesso modo $s', r', q', p' \dots$ ec. i coefficienti di S, R, Q, P avuti nella formola formata al num. 102., ed i valori di

$$x^m - s' x^{m-1} + r' x^{m-2} - q' x^{m-3} + \dots \text{ ec.} = 0$$

faranno i valori di

$$H, I, K, L, M, N, \dots \text{ ec.}$$

da sostituirsi in T .

3.º I valori di $A, B, C \dots Q, R, S$ si determineranno in amendue i generi di serie ricorrenti qui spiegate, col noto paragone dell'indeterminato T con i primi n termini dati, o af-

funti

funti della serie di cui vien data la legge. Si noti, che per le serie algebrico-geometriche, farà $S = (A + Bm + Cm^2 + Dm^3 + Dm^4 \dots \text{ ec.}) H^m - A$; e che se sia $H = 1$, S farà la somma semplici serie aritmetiche.

107. Una sola è la difficoltà, che s'incontra nell'uso delle precedenti equazioni. Siano dati i primi due termini 1. 1 d'una serie ricorrente del secondo ordine, e tale, che per avere un altro qualunque termine, sia necessario sommare il primo termine precedente moltiplicato per 3 col secondo precedente moltiplicato per $-\frac{9}{4}$; quale farà la forma del suo termine gene-

rale? Avrà egli la forma d'una serie geometrica, o d'una serie aritmetico-geometrica? In questo, ed in somiglianti casi, si sciogla l'equazione $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$, si avrà $x = \frac{3}{2}$, $x = \frac{3}{2}$;

cioè si avranno due radici eguali; questo è segno, che il cercato termine generale non può avere la forma $AH^m + BI^m$, ma solamente la forma $(A + Bm)H^m$, cioè farà $T = (A + Bm)$

$\left(\frac{3}{2}\right)^m$. Se si sostituisce $\frac{3}{2}$ invece di H, I in $AH^m + BI^m$, si avrebbe $\left(\frac{3}{2}\right)^m A + \left(\frac{3}{2}\right)^m B$, donde $1 = \frac{2}{3}$, che è un assurdo.

108. Basti il detto fin qui sulle serie ricorrenti, cioè sulle serie aritmetiche, sulle serie geometriche, e sulle serie composte da queste due. Per le serie, che non sono ricorrenti, io ne produrrò d'una sola specie, che ne abbraccia infinite subalterne. Chi desiderasse una più precisa notizia su altre serie più intralciate, legga il citato Commentario. Contempliamo intanto la formola

$$S = \frac{Im + Mm^2 + Nm^3 \dots + Rm^{p-1} + Sm^p}{(A + Bm)(A + Bm - 1) \dots (A + Bm - p + 2)(A + Bm - p + 1)}$$

So-

Sostituendo $m-1$ invece di m , si avrà

$$s = \frac{L \cdot \overline{m-1} + M \cdot \overline{m-1}^2 + N \cdot \overline{m-1}^3 + \dots + R \cdot \overline{m-1}^{p-1} + S \cdot \overline{m-1}^p}{(A+B \cdot \overline{m-1})(A+B \cdot \overline{m-2}) \dots (A+B \cdot \overline{m-p+1})(A+B \cdot \overline{m-p})}$$

Per sottrarre l' s dall' S , si moltiplichino i termini della frazione S per $A+B \cdot \overline{m-p}$, ed i termini della frazione s per $A+Bm$; fatta la riduzione, non si avrà più il T sotto la forma di $S-s$, ma chiamando \mathcal{Q} , \mathcal{Q}' nel secondo membro delle seguenti equazioni tutto il secondo fattore del primo membro, farà il numeratore di T .

$$(A+B \cdot \overline{m-p}) \left\{ \begin{array}{l} Lm + Mm^2 + Nm^3 \dots \\ \dots + Rm^{p-1} + Sm^p \end{array} \right\} = (A+Bm - Bp) \mathcal{Q}$$

$$-(A+Bm) \left\{ \begin{array}{l} L \cdot \overline{m-1} + M \cdot \overline{m-1}^2 + N \cdot \overline{m-1}^3 \\ \dots + R \cdot \overline{m-1}^{p-1} + S \cdot \overline{m-1}^p \end{array} \right\} = (A+Bm) \cdot (-\mathcal{Q}')$$

ed il denominatore

$$D = (A+Bm)(A+B \cdot \overline{m-1}) \dots (A+B \cdot \overline{m-p+1})(A+B \cdot \overline{m-p})$$

E' manifesta la legge, con cui va decrescendo il denominatore di T . Per conoscere la legge, che regna nel numeratore, è evidente, che egli è eguale a

$$(A+Bm)(\mathcal{Q}-\mathcal{Q}') - Bp\mathcal{Q}$$

cioè eguale ad $A(\mathcal{Q}-\mathcal{Q}') + Bm(\mathcal{Q}-\mathcal{Q}') - Bp\mathcal{Q}$; ed essendo

$$\left\{ \begin{array}{l} L \cdot (m - \overline{m-1}) = -L \\ M \cdot (m^2 - \overline{m-1}^2) = -M + 2Mm \\ N \cdot (m^3 - \overline{m-1}^3) = +N - 3Nm + 3Nm^2 \\ \vdots \\ R \cdot (m^{p-1} - \overline{m-1}^{p-1}) = +R + \frac{p-1}{1} Rm + \frac{p-1}{1} \cdot \frac{p-2}{2} Rm^2 \dots \\ S \cdot (m^p - \overline{m-1}^p) = +S + \frac{p}{1} Sm + \frac{p \cdot p-1}{1 \cdot 2} Sm^2 \dots - pSm^{p-1} \end{array} \right.$$

eguale

eguale a $\mathcal{Q}-\mathcal{Q}'$, sostituendo questo valore di $\mathcal{Q}-\mathcal{Q}'$ nel numeratore $(A+Bm)(\mathcal{Q}-\mathcal{Q}') - Bp\mathcal{Q}$ si vedrà anche in questo la costante legge de' suoi termini.

109. 1.º Ciascun fattore del denominatore di T è il termine generale d'una serie aritmetica di primo ordine. La serie aritmetica del secondo fattore $A+B \cdot \overline{m-1}$ non è diversa dalla serie del primo fattore $A+Bm$, se non in questo, che il primo termine della serie del secondo fattore, è il secondo termine della serie del primo fattore; e così la serie del terzo fattore, comincia dal secondo termine della serie del secondo fattore, la serie del quarto fattore comincia dal terzo del terzo fattore... ec.

2.º Il denominatore di T è lo stesso, che il denominatore di S .
3.º Fatto il numero de' fattori del denominatore eguale a $p+1$, l'esponente massimo di m nel numeratore di T è $p-1$, cioè minore di due unità del numero de' fattori.

4.º Dato qualunque termine generale, che abbia le tre precedenti proprietà, si troverà il numeratore della somma generale paragonando colla formola il dato numeratore; e conseguentemente se il termine generale d'una serie abbia le condizioni del nostro, si troverà sempre la somma generale della serie medesima.

110. Perchè sia più spedita la determinazione della somma generale delle serie, i cui termini generali hanno la forma del numero precedente; 1.º Fatto il numero de' fattori del denominatore D eguale ad r , si supponga

$$s = \frac{Lm + Mm^2 + Nm^3 + \dots + Sm^r}{D}$$

2.º Determinato s colla sostituzione di $m-1$ invece d' m in S , si riducano gli S , s allo stesso denominatore, cosicchè si abbia S' , s' ; farà $T = S' - s'$.

3.º Paragonando i termini di T con quegli del dato termine generale si avranno i valori di L , M , N ... ec.

111. L'uso del calcolo farà svanire certe difficoltà, che forse fa nascere la semplice enunciazione del metodo.

Se nel denominatore D non si succedano i fattori, come in T del num. 108., ma manchino alcuni fattori intermedj, si moltiplichino il numeratore, ed il denominatore del dato termine generale per i fattori, che mancano. Se..... ec.

Osservazioni sul metodo del P. Riccati.

112. **I**L metodo del P. Riccati, tuttocchè elegante, semplice, ed universale, sembra a primo aspetto alquanto prolisso, e tedioso nella sua applicazione. Quasi sempre, è vero, si hanno a sciogliere equazioni solamente di primo grado; ma per ogni nuova serie pare sia uopo ripetere le stesse operazioni, di sottrazioni d'un' equazione dall'altra, di moltiplicazioni....., con facile pericolo di errare ne' calcoli, e nelle frequenti sostituzioni. Non è però così in fatti a chi vi si metta di proposito, e si renda per qualche tempo famigliari gli artificj, che per entro vi sparge il suo autore; anzi nel rimirare partitamente le formole, che si deducono da quel metodo ne' casi particolari, si accorgerà chicchessia, che si possono esse generalizzare assai, e farle servire per infiniti altri casi simili. Il P. Riccati non ha voluto dedurre questi compendi, che ben vedeva contenersi nel suo metodo, o per non dilungarsi troppo dal suo fine, o per lasciare a chi leggesse il Commentario con attenzione, il piacere di dedursegli da se. Io esporrò le osservazioni, che ho fatte sul metodo del P. Riccati, per renderlo più semplice, e più facile ad applicarsi alle serie di qualunque genere, ed insieme scioglierò qualche interessante problema sulle serie medesime. Incominciamo dalle serie aritmetiche.

113. Le

113. Le progressioni aritmetiche, che sono le serie aritmetiche di primo ordine, hanno, come detto è al num. 87. la forma b ; $b+a$; $b+2a$; $b+3a$... ec.; e le serie aritmetiche di secondo ordine, hanno la forma c ; $c+b$; $c+2b+a$; $c+3b+3a$... ec. Col metodo del P. Riccati si ha per termine generale, e per somma generale di queste due serie

$$\text{Per la prima..... } T = b \\ - a + a m$$

$$S = b m$$

$$- \frac{1}{2} a m + \frac{1}{2} a m^2$$

$$\text{Per la seconda.... } T = c$$

$$- b + b m$$

$$+ a - \frac{3}{2} a m + \frac{1}{2} a m^2$$

$$S = c m$$

$$- \frac{1}{2} b m + \frac{1}{2} b m^2$$

$$+ \frac{1}{3} a m - \frac{1}{2} a m^2 + \frac{1}{6} a m^3$$

114. Cerco se questi due T , ed S seguitino qualche legge costante nella loro formazione, ed osservo, che nel primo T la parte $-a+a m$ è eguale ad $m-1 \cdot a$; onde per le serie aritmetiche di primo ordine si ha $T = b + \frac{m-1}{1} \cdot a$, come al num. 81. del libro primo.

La seconda formola di T è composta d'una parte, che ha la stessa forma della precedente, cioè $c-b+b m$, e di un'altra,

D d 2

in

in cui non c'entrano, che gli m , e gli a ; perciò si avrà la prima parte ridotta a $c + \frac{m-1}{1} b$, e la seconda $\frac{1}{2} a m^2 - \frac{3}{2} a m$

$+ a = \frac{1}{2} a m^2 - \frac{3}{2} a m + \frac{2}{2} a$; non considerando per ora il comune denominatore 2 di questa seconda parte, si ha $a m^2 - 3 a m + 2 a = (m^2 - 3 m + 2) a = \overline{(m-1) \cdot (m-2)} a$; e la seconda parte della formola di T , farà $\frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} a$; cioè per le serie

aritmetiche di second' ordine, farà

$$T = c + \frac{m-1}{1} b + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} a.$$

115. Si sono adunque ridotti que' due T trovati col metodo del P. Riccati ad avere per coefficienti de' termini i coefficienti numerici della formola delle potenze d'un binomio; inoltre in amendue i T così disposti l' a sta sempre al primo termine verso destra, e verso la sinistra succedono negli altri termini il b , ed il c ; finalmente il numero de' termini in ciascun T è eguale ad $n+1$. Se queste osservazioni sono generalmente vere per tutti i T delle altre serie aritmetiche, per le serie aritmetiche di terzo ordine, si avrà

$$T = d + \frac{m-1}{1} c + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} b + \frac{m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} a.$$

E di fatti tanto coll' applicare il metodo del P. Riccati all'espressione generale di queste serie d ; $d + d c$; $d + 2 c + b$; $d + 3 c + 3 b + a$; ... ec., quanto facendo le moltiplicazioni indicate nel proposto valore di T ; si ha sempre

$$\frac{d-c+c m}{1} + \frac{b m^2 - 3 b m + 2 b}{2} + \frac{a m^3 - 6 a m^2 + 11 a m - 6 a}{6}$$

Lo

Lo stesso avverrebbe in tutte le altre espressioni generali delle serie aritmetiche di qualunque ordine; massimamentechè si mostra una specie d'analogia tra i coefficienti delle lettere ne' termini delle serie aritmetiche, ed i coefficienti de' termini delle potenze; così nell'espressione delle serie aritmetiche di terz' ordine, i coefficienti del terzo termine $d + 2 c + b$ sono i coefficienti del quadrato d'un binomio; i coefficienti del quarto termine sono i coefficienti del cubo... ec.

116. Con simili riflessioni fatte sulle formole delle somme generali, si ha per le serie aritmetiche

di primo ordine

$$S = \frac{m}{1} b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a$$

di second' ordine

$$S = \frac{m}{1} c + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} b + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a$$

di terz' ordine

$$S = \frac{m}{1} d + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} c + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} b + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a.$$

$$\frac{m-3}{4} a.$$

..... ec.

117. Dalla sola ispezione di queste formole, e dal num. 97. si ha un metodo facile per trovare il termine generale, e la somma generale d'una serie aritmetica di qualunque ordine. Si prendano come al num. 97. le differenze prime, seconde, ... n^{esime} della data serie; chiamando a il primo termine della colonna A , chiamando b il primo termine della colonna B , chiamando c il primo termine della colonna C ... ec.; si ha

T

$$T = a + \frac{m-1}{1} b + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} c + \frac{m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \dots \text{ ec.}$$

$$S = \frac{m}{1} a + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} b + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} c + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d + \dots \text{ ec.}$$

118. A fare meglio sentire l'utilità delle due precedenti formole, gioverà l'esempio seguente. Si cerchi il termine generale, e la somma generale della serie aritmetica 2; 9; 24; 50; 90; . . . ec.

Nel metodo del P. Riccati: 1.º Conviene esaminare, quali siano le differenze costanti di questa serie; si avrà

A	B	C	D
2			
9	7	8	
24	15	11	3
50	26	14	3
90	40		
⋮			
⋮			
ec.			

cioè le differenze terze sono costanti.

2.º La formola del termine generale per le serie di terze differenze costanti è $A + Bm + Cm^2 + Dm^3$; che mettendo $m=1$ rappresenterà il primo termine 2 della serie data; mettendo $m=2$ rappresenterà il secondo termine 9 . . . ec.; si avrà dunque

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= 2 \\ A + 2B + 4C + 8D &= 9 \\ A + 3B + 9C + 27D &= 24 \\ A + 4B + 16C + 64D &= 50 \end{aligned}$$

3.º Dispo-

3.º Disponendo per ordine le differenze di queste equazioni; cioè sottraendo la prima dalla seconda, la seconda dalla terza, e la terza dalla quarta, si ha

$$\begin{aligned} B + 3C + 7D &= 7 \\ B + 5C + 19D &= 15 \\ B + 7C + 37D &= 26 \end{aligned}$$

Le differenze di queste tre equazioni, danno

$$\begin{aligned} 2C + 12D &= 8 \\ 2C + 18D &= 11 \end{aligned}$$

Le differenze di queste due, danno finalmente $D = \frac{1}{2}$.

4.º Rimontando da questo valore di D ai valori di C, B, A colle solite sostituzioni, si ha $A=0 \quad C=1$

$$B = \frac{1}{2} \quad D = \frac{1}{2}$$

donde si avrà $T = \frac{1}{2}m + m^2 + \frac{1}{2}m^3$.

119. Per trovare S , si scelga la formola $Am + Bm^2 + Cm^3 + Dm^4$; 1.º Sostituendo $m=1$ invece di m , e sottraendo la nuova formola dalla formola assunta, si ha

$$\begin{aligned} &A \\ &-B + 2Bm \\ &+ C - 3Cm + 3Cm^2 \\ &-D + 4Dm - 6Dm^2 + 4Dm^3 \end{aligned}$$

2.º Paragonando il termine, che non contiene m col termine, che non ha m di T , cioè con zero, e ciascuno degli altri col suo corrispondente in T ; si ha

$$\begin{aligned} A &= \frac{5}{12} & C &= \frac{7}{12} \\ B &= \frac{7}{8} & D &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

donde

donde si avrà $S = \frac{5}{12}m + \frac{7}{8}m^2 + \frac{7}{12}m^3 + \frac{1}{8}m^4$.

120. Tale è il metodo del P. Riccati; usando le formole del num. 117. basta trovare le differenze della data serie, che è il primo passo del metodo precedente, e si avrà

$$\begin{array}{l} a=2 \quad c=8 \\ b=7 \quad d=3 \end{array}$$

fatte le sostituzioni in T , ed S , farà

$$\begin{aligned} T &= 2 + \frac{m-1}{1} \cdot 7 + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} \cdot 8 + \frac{m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 \\ S &= \frac{m}{1} \cdot 2 + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \cdot 7 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 8 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 3 \end{aligned}$$

Tutti gli altri termini de' T , S indeterminati svaniscono per essere uno de' loro fattori, e , f , g , ... ec. eguale a zero.

121. Le formole del num. 117. mutando alcune denominazioni, e componendo i coefficienti delle lettere, che distinguono ciascun termine, si riducono alle formole del Goldbachio (Atti di Lipsia 1720.). Aveva certamente in vista queste formole il P. Riccati, quando disse nella prefazione del suo Commentario; *Regulae, quam sine demonstratione attulit Goldbachius, neque apparet unde deduxerit, in mea methodo genuinum fundamentum habebis*. Confesso sinceramente, che, prima di pensare a Goldbachio, dalla sola applicazione del metodo del P. Riccati alle generali espressioni delle serie aritmetiche, io m'era dedotte le predette formole, e che leggendo poi a caso la memoria del Goldbachio, a mala pena mi sono accorto, che le sue formole si potevano ridurre alle mie. Io non so come siasi mai egli indotto quest' autore a mettere l'*eccetera* dopo cinque termini

mini della sua formola, non iscoprendosi all'occhio nelluna legge de' coefficienti. Restano adunque in quest' articolo dimostrate, e dedotte dal metodo del P. Riccati anche le formole del Goldbachio.

122. Ciochè s'è fatto per le serie aritmetiche, si può parimenti stendere alle serie geometriche, ed alle composte d'amenue. Si moltiplichino le formole aritmetiche del num. 87., termine per termine, coi termini di varie progressioni geometriche indeterminate, e prese dal num. 84. del libro precedente; alle nuove formole, che si avranno da queste moltiplicazioni, si applichi successivamente il metodo del P. Riccati, e si avrà la costante legge per trovare senz'altro calcolo il T , e l' S . Noto però, che fatto il calcolo, non ho trovate formole tanto eleganti, quanto per le serie aritmetiche; ma sono tali, per cui si schivano varie equazioni di terzo grado, e di grado più elevato, che sono inevitabili nel metodo del P. Riccati in varie serie geometriche. Noi passiamo oltre a cose più interessanti.

Passaggio dalle serie interrotte alle serie continuate.

123. **I**O chiamo *serie interrotta* una serie A' formata da termini presi ad eguali intervalli di termini r , in una data serie qualunque A ; e questa serie A la chiamo *serie continuata*. Il problema, che prendo a sciogliere nel presente articolo è il seguente: *Data la legge, che regna in una serie qualunque interrotta, o aritmetica, o geometrica, o comunque composta da queste due, trovare il T, e l'S della sua continuata.*

124. La soluzione di questo problema, dipende da uno de' seguenti due teoremi.

Teorema primo. Il termine m^{esimo} d'una serie interrotta A' è l' $(m-1 \cdot r + m)^{\text{esimo}}$ della sua continuata A .

E e

Tco-

Teorema secondo. Il termine m^{efmo} d'una serie continuata A è $P \frac{m-r}{r+1}^{efmo}$ della sua interrotta A' .

Il primo teorema è manifesto dalla formazione della serie A' . Per avere il secondo termine di A' , si deve omettere dopo il primo termine di A un numero r di termini; cioè il secondo termine di A' è $P(1+r+1)^{efmo}$ di A ; per avere il terzo termine di A' , si deve omettere un altro numero r di termini dopo $P(1+r+1)^{efmo}$ di A ; cioè il terzo termine di A' è $P(1+r+1+r+1)^{efmo}$, ossia il $(2r+3)^{efmo}$ di A ; così il quarto di A' si troverà essere il $(3r+4)^{efmo}$ di A , e da qui già si conosce generalmente, che $P m^{efmo}$ di A' è $P \frac{m-r}{r+1}^{efmo}$ di A .

Il secondo teorema si deduce facilmente dal primo. Si chiami m la classe del termine m^{efmo} della serie continuata, ed m' quella del termine m^{efmo} della interrotta; Sarà per il teorema precedente $m' = \overline{m-1} . r + m = m r + m - r = \overline{r+1} . m - r$;

donde $m' + r = \overline{r+1} . m$, cioè $m = \frac{m' + r}{r+1}$.

Si noti, che, nelle due formole precedenti $P m$, e $P m'$ indicano sempre lo stesso numero; non s'è posto l'accento al secondo m , che per distinguere $P m$ della serie continuata dall' m della interrotta.

125. È più spedito l'uso del secondo teorema per la soluzione del problema proposto. Si cerchi il T , e $P S$ della data serie interrotta A' , come se fosse una serie continuata; invece

di m , si sostituisca in amendue il numero $\frac{m-r}{r+1}$; si avrà il T ,

e $P S$ della continuata A .

Sia

Sia data, a cagione d'esempio, la serie geometrica $A \dots 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64 \dots$ ec.; da questa serie se ne formi un' interrotta, con omettere successivamente due termini dopo il primo; si avrà la serie $A' \dots 1 \cdot 8 \cdot 64 \dots$ ec. Il problema si riduce a trovare $P S$, ed il T di A , posto, che si conosca unicamente la serie A' , ed il numero r de' termini ommessi in A per formarla. Già si sa, che il termine generale di A' è 8^{m-1} ; invece di m si scriva il numero $\frac{m+r}{r+1}$, cioè, nel

caso nostro, si scriva $\frac{m+2}{3}$, e si avrà $8^{\frac{m+2}{3}-1} = 8^{\frac{m-1}{3}}$

per termine generale della serie continuata A ; e di fatti $8^{\frac{m-1}{3}}$

è eguale a 2^{m-1} , che altronde si sa essere il termine generale di A ; lo stesso dicasi per $P S$.

126. Uso del primo teorema. Sia data la serie interrotta di qualunque genere.

$A' \dots f \cdot * \cdot g \cdot * \cdot b \cdot * \cdot i \cdot * \cdot k \dots$ ec.

gli asterischi (che dovrebbero essere r in numero) posti tra un termine, e l'altro di questa serie A' , tengono luogo de' termini, r in numero, che si suppongono ommessi nella serie incognita A , per formare la serie data.

1.º Si prenda indeterminatamente il termine generale per le serie d'ordine n della classe della data A ; in questo T , si sostituisca invece di m il numero $\overline{m-1} . r + m$, e fatto questo nuovo m successivamente eguale ad $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots$ ec., si supponga T eguale al primo, al secondo, al terzo termine di A' . Con queste equazioni si determineranno i valori delle indeterminate del primo affunto T , che sostituiti nel T medesimo daranno il termine generale cercato.

2.º Avuto il termine generale di A per mezzo della serie A' , si avrà coi metodi già spiegati, ancora $P S$ di A .

E c 2 •

127. Sia,

127. Sia, a cagione d'esempio, la data serie A' una serie interrotta di una serie aritmetica, continuata A , d'ordine n , il

$$\text{termine generale della quale è } T = a + \frac{m-1}{1} b + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} c + \dots \text{ ec.}$$

E' evidente 1.º, che questo T sarà eguale al primo dato termine f , se si supponga $m=1$; sarà eguale a g , se si supponga (per il teor. 1.º) $m=r+2$; sarà eguale al terzo b , se si supponga $m=2r+3$; ... ec. Cioè i valori di m in T formeranno una progressione aritmetica, che incomincia da $r+2$, ed ha per differenza costante la quantità $r+1$.

2.º Se la serie continuata è di differenze prime costanti, anche la data serie interrotta avrà le differenze prime costanti: Se la serie continuata è di differenze seconde costanti, anche la serie interrotta avrà le differenze seconde costanti; ... cioè l'ordine della serie continuata sarà l'ordine della interrotta.

3.º Se la serie continuata ha le differenze n^{esime} costanti, s'arriverà alle differenze costanti anche nella interrotta con $n+1$ termini.

4.º La formola T , che rappresenta ciascun dato termine dopo le sostituzioni de' valori rispettivi di m , si romperà dopo due termini se $n=1$, dopo tre termini se $n=2$, dopo $n+1$ termini per le differenze n^{esime} .

128. 1.º Adunque si avrà per il T di ciascun dato termine di A' .

$$f = a$$

$$g = a + \frac{r+1}{1} b + \frac{r+1 \cdot r+0}{1 \cdot 2} c + \frac{r+1 \cdot r+0 \cdot r-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \dots \text{ ec.}$$

$$b = a + \frac{2r+2}{1} b + \frac{2r+2 \cdot 2r+1}{1 \cdot 2} c + \frac{2r+2 \cdot 2r+1 \cdot 2r+0}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \dots \text{ ec.}$$

k

$$k = a + \frac{3r+3}{1} b + \frac{3r+3 \cdot 3r+2}{1 \cdot 2} c + \frac{3r+3 \cdot 3r+2 \cdot 3r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \dots \text{ ec.}$$

$$i = a + \frac{4r+4}{1} b + \frac{4r+4 \cdot 4r+3}{1 \cdot 2} c + \frac{4r+4 \cdot 4r+3 \cdot 4r+2}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \dots \text{ ec.}$$

$$l = a + \dots \text{ ec.}$$

2.º In questa serie d'equazioni se ne dovranno prendere due, cominciando da f , se $n=1$; se ne dovranno prendere tre, se $n=2$, e per le differenze n^{esime} se ne dovranno prendere $n+1$. Il secondo membro di ciascuna di queste equazioni, toltane la prima, dovrà sempre avere un numero $n+1$ termini; cioè ciascuna ne avrà tanti nel secondo membro, quante sono le equazioni prese. Con queste equazioni si determineranno le indeterminate a, b, c, \dots per ogni caso.

129. Applico il metodo alle serie aritmetiche di terzo ordine. Per queste non si richieggono più di quattro termini f, g, b, k , e le equazioni saranno le prime quattro del num. precedente terminate inclusivamente al termine, che contiene il d : prendendo le differenze di queste equazioni, e le differenze delle differenze, ... come al num. 81, si avrà

fatto	A	B	C	D	$a=f$
	f				
...	p				$b = \frac{p}{(r-1)} - \frac{r t}{2(r+1)^2} + \frac{r \cdot 2r+1 \cdot u}{6(r+1)^3}$
	g	...	t		
...	q		...	u	$c = \frac{t}{(r+1)^2} - \frac{r u}{(r+1)^3}$
	b	...	v		
...	s				$d = \frac{u}{(r+1)^3}$
	k				

130. Quindi si formino le quattro colonne A, B, C, D delle differenze de' dati termini interrotti, come al num. 97., e si

si chiamino (per tenere denominazioni analoghe a quelle del num. 117.) a' , b' , c' , d' i primi termini delle colonne medesime, e per le serie di differenze terze costanti

fatto $a = a'$

$$b = \frac{b'}{(r+1)} - \frac{r c'}{2(r+1)^2} = \frac{r \cdot 2r-1 \cdot d'}{6(r+1)^3}$$

$$c = \frac{c'}{(r+1)^2} - \frac{r d'}{(r+1)^3}$$

$$d = \frac{d'}{(r+1)^3}$$

$$\text{farà } T = a + \frac{m-1}{1} b + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} c + \frac{m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} d.$$

131. È evidente, che se le serie interrotte faranno di secondo ordine, svaniranno nelle formole precedenti il d , e tutte le quantità, nelle quali c'entra d' : Se le serie interrotte faranno di primo ordine svaniranno nelle formole precedenti il c , d , e tutte le quantità, ove c'entra c' , d' . Quindi

Per le serie di differenze seconde costanti

fatto $a = a'$

$$b = \frac{b'}{(r+1)} - \frac{r c'}{2(r+1)^2}$$

$$c = \frac{c'}{(r+1)^2}$$

$$\text{farà } T = a + \frac{m-1}{1} b + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} c.$$

Per

Per le serie di differenze prime costanti

fatto $a = a'$

$$b = \frac{b'}{(r+1)} \text{ farà } T = a + \frac{m-1}{1} b$$

132. Se si applicasse il metodo medesimo alle serie aritmetiche d'ordine più elevato del terzo, si troverebbe una costante legge de' valori di a , b , c ... ec. Si troverebbe a cagione d'esempio, che disponendo questi valori come al num. 130., dovrebbero corrispondersi nella prima colonna, per numeratori gli a' , b' , c' ... ec., e per denominatori le potenze $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$... ec. di $r-1$ prese per ordine; nella seconda colonna, per numeratori gli $1 c'$, $2 d'$, $3 e'$, $4 d'$... ec. ciascuno moltiplicato per r , e per denominatori il doppio delle potenze $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$... di $r+1$ prese per ordine; nella terza colonna... ec. In questa guisa si avrebbe poi in generale, e senz'altro calcolo, il valore di ciascuna lettera a , b , c ... ec. per le serie aritmetiche d'ordine n ; ed ancora d'ogni altra serie.

133. Si noti la differenza de' due metodi precedenti. Nel termine generale, e nella generale somma d'una serie continuata di qualunque genere, per esempio delle serie aritmetiche, entrano due sole indeterminate, cioè gli m , e gli a , b , c ... ec. Col primo teorema (num. 124.) si è cercato quali doveffero essere le variazioni degli a , b , c ... ec., ed il secondo teorema ci ha date le variazioni degli m , per passare dalle serie interrotte supposte note, alle continuate supposte ancora sconosciute.

Interpolazione delle serie.

134. *Interpolare* una data serie, significa inferire tra due qualunque suoi termini un dato numero r di termini intermedj, che seguano la medesima legge della serie data. Se la data

data serie è una serie aritmetica di primo ordine, s'è già dato al num. 78. del libro precedente il metodo d'interpolarla; così pure al num. 65. si è esposto il metodo d'interpolare le serie geometriche di primo ordine. Ma oltrecchè que' metodi sono affai faticosi per la pratica, massimamente quando si debba interpolare tutta la serie fino al termine m^{esimo} , il problema, che noi ci proponiamo al presente comprende tutte le serie d'ordine n di qualunque genere, o sommabili, o no, purchè di esse si possa trovare il termine generale.

135. Il problema della interpolazione, non è, a parlare con rigore, che una parte di quello, che abbiamo sciolto nell'articolo precedente. La serie data a interpolarsi corrisponde alla nostra serie interrotta, e la serie, che si avrà dopo l'interpolazione, corrisponderà alla nostra serie continuata. Dico *corrisponderà*, perchè la serie continuata non sarà propriamente la serie interpolata, non cercandosi in tutto coll'interpolazione, che termini $n(r+1)+1$, e col termine generale della serie continuata, si trovano tutti gli altri termini all'infinito; onde il problema dell'articolo precedente è più generale di quello della interpolazione.

136. Si aggiunge, che coll'interpolazione non si cercano il più delle volte tutti i termini della serie interpolata, ma solamente l' s^{esimo} degli r posti fra l' m^{esimo} , e l' $(m+r)^{\text{esimo}}$ della serie data. Or chi volesse sciogliere il problema dell'interpolazione col metodo dell'articolo precedente, dovrebbe:

- 1.° Cercare coi termini della data serie, il termine generale T della corrispondente serie continuata.
- 2.° Dovrebbe cercare quale termine sia di tutta la serie data, e supposta interpolata l' s^{esimo} cercato.
- 3.° E finalmente sostituire in T invece di m il numero, che ne indica la classe.

137. Esempio. Si cerchi il termine quinto de' cinque interpolati

polati tra i termini 78., e 300. della serie aritmetica
 $A' \dots 0 \cdot 78 \cdot 300 \cdot 666 \dots$ ec.

$$1.^\circ \text{ Si ha (num. 130.) } TA = \frac{m-1}{1} 3 + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} 4,$$

$$\text{oppure trovato } TA' = \frac{m-1}{1} 78 + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} 144,$$

$$\text{si ha (num. 125.) } TA = \frac{m-1}{1} 13 + \frac{m-1 \cdot m-7}{1 \cdot 2} 4.$$

2.° Il quinto termine cercato tra i due della data serie A' sarebbe il dodicesimo della interpolata A ; come si può vedere contando nella serie A' i dati termini, e gli asterischi, che si frappongano tra l'uno, e l'altro invece de' termini interpolati.

$A \ 0 \cdot * \cdot * \cdot * \cdot * \cdot * \cdot 78 \cdot * \cdot * \cdot * \cdot * \cdot * \cdot 300 \dots$ ec.

3.° Si dovrà dunque supporre in uno dei TA trovati, $m=12$, e si avrà pel quinto termine cercato 253.

Cicchè s'è fatto qui per avere il quinto termine de' cinque interpolati tra 78 e 300 di A' , è evidente, che si può egualmente fare per qualunque altro s^{esimo} degli r interpolati tra due qualunque termini di qualunque serie. Ma ad alcuni sembra noioso il dovere badare ogni volta a quel valore di m da sostituirsi in TA . Ho pensato perciò di schivare per l'interpolazione, anche quest'incomodo, col metodo seguente.

138. Trovare il termine s^{esimo} degli r interpolati tra il termine m^{esimo} , ed $(m+r)^{\text{esimo}}$ d'una data serie A' .

1.° Si cerchi il termine generale T di A' . 2.° Si sostituisca in T il numero $m + \frac{s}{r-1}$ invece di m .

Così per avere il quinto termine de' cinque interpolati tra 78, e 300 della serie

$A' \dots 0 \cdot 78 \cdot 300 \cdot 666 \dots$ ec.

F f

Si

Si ha 1.º $T A' = \frac{m-1}{1} 78 + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} 144$.

2.º Per essere $m=2$, $r=5$, $s=5$, sostituendo invece di m il

numero $m + \frac{s}{r+1} = 2 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}$, si ha $(\frac{17}{6} - 1) 78 + (\frac{17}{6} - 1)$

$(\frac{17}{6} - 2) (\frac{144}{2} = \frac{11}{6} 78 + \frac{11}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 72 = \frac{11}{6} (78 + \frac{5}{6} \cdot 72) = \frac{11}{6}$

$(78 + 60) = \frac{11}{6} \cdot 138 = 253$, come si era avuto prima.

139. Dimostrazione del metodo. Si indichi per m la classe, che occupa in A qualunque termine t , e per m' si indichi la classe, che il medesimo t occupa in A' ; è chiaro, che gli m , m' saranno qui numeri sempre diversi.

La serie A contiene tutti i termini di A' , e di più tutti gli s^{esimo} degli r ommessi per formare A' ; quindi in A' non si contengono, che i termini $(m-s)^{esimo}$ di A ; cioè gli m^{esimo} di A' sono gli $(m-s)^{esimo}$ di A ; ma per il teorema 1.º num. 124. gli m^{esimo} di A' sono gli $(\overline{m-1} \cdot r + m)^{esimo}$ di A ; dunque gli $(m-s)^{esimo}$ di A sono gli $(\overline{m'-1} \cdot r + m')$ del medesimo A .

Quindi $m-s = \overline{m'-1} \cdot r + m' = m' r + m' - r$; ed $m' \cdot \overline{r+1} + s = m + r$, ossia $m' + \frac{s}{r+1} = \frac{m+r}{r+1}$; cioè il numero

$m' + \frac{s}{r+1}$ è eguale al numero, che sostituito in $T A'$ ha dato (num. 137.) l' s^{esimo} cercato.

140. Si noti: 1.º Che prima d'applicare i metodi del num. 136. 138. all'interpolazione delle serie, conviene bene distinguere di quale classe esse sieno, se aritmetiche, o geometriche, o composte d'amendue, o d'altra specie qualunque: Ciò è neces-

necessario per trovare il vero termine generale delle date serie, con cui unicamente si troveranno coi metodi prescritti gli esatti termini intermedj.

2.º Che si propongono talvolta certe serie a interpolarsi, di cui non si fa ben definire a quale classe appartengano; in questi casi converrà osservare a quale classe s'accostino di più, per quindi maneggiarle come se veramente fossero di quella classe. Così nel calcolare i luoghi de' Pianeti si è osservato, che le serie de' luoghi de' medesimi, dedotte, o dalla osservazione, o dalle tavole per diversi tempi dati, più s'accostano alle serie aritmetiche, che non ad altre; quindi nel determinare le loro posizioni intermedie a' tempi, ed alle posizioni date, si suole sempre ad essi applicare il metodo delle serie aritmetiche. Il Sig. De La Lande (Acad. Par. an. 1761. p. 125., ed Astr. 1. 24.) ha dimostrato con molta precisione, che per i calcoli astronomici, basta ridurre colle medie aritmeticamente proporzionali le differenze seconde, o al più le terze, ad essere costanti.

3.º Che in questi casi l'interpolazione non farà che approssimata; e perchè approssimi sempre più nel determinare col nostro metodo il termine generale delle serie, converrà usare certe avvertenze, che suggerirà l'esperienza, e l'uso del calcolo; le principali sono di prendere per a' il termine m^{esimo} , tra il quale, e l' $(m+1)^{esimo}$ si deve determinare l' s^{esimo} degli r ; così il b' farà la differenza dell' m^{esimo} , e dell' $(m+1)^{esimo}$, il c' farà; ed il numero $m + \frac{s}{r+1}$ da sostituirsi in $T A'$ invece di m , si trasfor-

merà in $1 + \frac{s}{r+1}$; questi sono compedj del num. 138.

141. Il Sig. Mouton è stato il primo a proporre il problema delle interpolazioni nell'anno 1670. Non si tardò a conoscere di quanta importanza esso fosse per tutta la Matematica pura, e mista; ed i migliori Matematici di questo secolo hanno

prefo ad illustrarlo, ed a scioglierlo con metodi tutti tra se diversi, e tutti degni del vasto loro intendimento. Siano date due serie qualunque di quantità tali, che a ciascuna termine d'una serie corrisponda con data legge un termine dell'altra; e si chiamino *funzioni* i termini della prima serie, e *radici* i termini della seconda: *Data una radice qualunque si cerca la funzione corrispondente, e data una funzione qualunque si cerca la corrispondente radice.* Questo problema è stato sciolto analiticamente dal Mayer (Acad. Petr. T. 2. p. 180.), e le formole del Mayer sono state ridotte a più semplice forma dall'Abbate La-Caille (Astr. Sol. P. 1. Sez. 1.). Il Newton (libr. 3. Princ. & Arit. Univ.); ed il Cotes (de Cal. diff. Newt.), rappresentando le radici con astrisse d'una curva, e le funzioni colle corrispondenti semi-ordinate ridussero alla geometria il problema medesimo: *Descrivere una linea curva di genere parabolico, che passi per punti comunque dati.* Aggiungi a questi il celebre Stirling verso il fine dell'egregio suo trattato sulle interpolazioni delle serie. Puoi ancora leggere i Commentarj sul sec. libr. di Newton (num. 75. 76. 77.) de' PP. Le Seur, e Jacquier, ed altri, ch'io qui non nomino per brevità.

142. Io mi sono presa la cura di leggere attentamente tutti i metodi de' citati Autori, e di ben penetrare le diverse strade, per cui ciascuno s'avvia al medesimo termine; ma finalmente sono entrata nel pensiero del Sig. De La Lande (Astron. I. 24. num. 3172.), cioè, che tutti, o la maggior parte di que' metodi non potevano mai essere d'un uso familiare, comunque il problema delle interpolazioni sia assai frequente nella Matematica, principalmente nell'Astronomia. Il principale loro difetto si è di non potere per lo più determinare veruno de' termini intermedi senza conoscere, e passare per i termini precedenti, con infinite, e noiosissime sostituzioni. Credo, che il mio metodo per ciascuna classe, ed ordine di serie supplisca generalmente

mente a questo incomodo; i calcoli mi sembrano facili, e brevi più di quello, forse, si poteva sperare.

143. Non voglio qui omettere due elegantissimi metodi per interpolare le serie aritmetiche, almeno fino alle terze differenze *inclusive*; questi sono i soli tra già pubblicati, che all'evitare tutti gli inconvenienti de' primi, congiungono una maravigliosa brevità nell'espressione, ed una eguale facilità ne' calcoli. Suppongo qui ancora, che si cerchi un intermedio tra l' m^{esimo} , e l' $(m+1)^{\text{esimo}}$ della data serie aritmetica. Il primo metodo si trova usato, ma non dimostrato, nè esposto in tutta la sua generalità pel secondo caso d'un problema de' logaritmi logilici nel tanto famoso libro intitolato: *Table of Logarithms* di Villedo Gardinero (Londra. 1742.). Si chiami a , cioèchè per noi è $\frac{s}{r-1}$, si chiami b , cioèchè in nostro linguaggio sa-

rebbe $\frac{s}{r-1} - 1$, e finalmente si chiamino d' , d'' , d''' le differenze prime, seconde, e terze de' numeri dati. La quantità x da aggiungersi al m^{esimo} per avere il termine cercato, farà

Per le seconde differenze

$$x = (d' + \frac{1}{2} b d'') a$$

Per le terze differenze

$$x = (d' + \frac{1}{2} b d' + \frac{1}{6} d''' \cdot \overline{b + b^2}) a.$$

L'altro metodo è del più volte citato Sig. De La Lande (Acad., ed Astr. luogo citato). Chiami egli p il nostro s , chiami m il nostro $r+1$, d la differenza del termine m^{esimo} , ed $(m+1)^{\text{esimo}}$, tra i quali si cerca il p^{esimo} , e d^2 , d^3 le differenze seconde, e terze de' dati termini. La quantità x da aggiungersi all' m^{esimo} per avere il termine cercato, farà

Per

Per le differenze seconde

$$x = p \frac{d}{m} + p \frac{p-m}{2} \cdot \frac{d^2}{m^2}$$

Per le differenze terze

$$x = p \frac{d}{m} + p \frac{p^2 - m^2}{6} \cdot \frac{d^3}{m^3}$$

144. Si noti: 1.° Che nelle formole del Gardinero, d' è positivo, quando i termini disposti per l'interpolazione vanno crescendo; d'' è parimenti positivo, quando le prime differenze vanno scemando; d''' è simile a d'' , quando le seconde differenze vanno scemando, altrimenti avrà un segno contrario a d'' . 2.° Che nelle formole del De La Lande il primo termine è in amendue lo stesso, ed è il quarto proporzionale dell'analogia $m:d::p$: al quarto, ed il secondo termine è in amendue diverso. La variazione de' segni in queste formole sono simili a quelle del Gardinero.

145. Essendo generali le formole del Gardinero, del De La Lande, e le mie, non possono essere diverse, che nell'espressione; così tutte le strade, per cui gli Analisti cercarono la soluzione delle equazioni di terzo grado andarono a terminare sempre nella formola Cardanica. E di fatti le differenze prime, seconde, terze, sono indicate

dal Gardinero per	d', d'', d'''
dal Sig. De La Lande per	d, d^2, d^3
da me per	$b, c, d;$

gli a, b del Gardinero sono gli $\frac{p}{m}, \frac{p}{m} - 1$ del Sig. De La Lande; ed il mio valore di m da sostituirsi invece di m in $T A'$, cioè (num. 140. 3.°) $1 + \frac{r}{r+1}$ si riduce all' $1 + \frac{p}{m}$ del Sig. De La Lande, ed al $1 + a$ del Gardinero; del resto le formole sono tutte identiche.

145. Ma:

146. Ma: il mio metodo 1.° non si restringe solo alle serie aritmetiche, ma indefinitamente a qualunque ordine, o genere di serie, di cui assegnare si possa il termine generale.

2.° Applicato alle serie aritmetiche, si possono usare le differenze quarte, quinte, n^{esima} , con quella facilità, con cui nel mio, e negli altri due metodi si usano le differenze seconde, e terze, vedendosi subito in $T A'$ la legge de' termini.

3.° Sostituendo nel mio $T A'$ il numero $1 + \frac{p}{m}$, oppure $1 + a$

invece di m , ed indicando colle lettere del Sig. De La Lande, o con quelle del Gardinero le differenze de' dati termini, si formeranno facilmente le formole per le differenze più alte, secondo il metodo di questi Autori; formole, che non si saprebbero per altra via determinare senza un calcolo assai prolisso, ed intralciato.

Nota al fine.

*A*L num. 51. ho esposto un teorema per isciogliere una frazione, che abbia per numeratore l'unità, e per denominatore un prodotto di più fattori qualunque, in più frazioni, ciascuna delle quali abbia per numeratore la stessa unità, e per denominatore abbia uno de' medesimi fattori.

Per dimostrare quel teorema ho seguito il metodo indicato dalla Sig.^{ra} Agnesi, di ridurre allo stesso denominatore la frazione data, e la somma delle derivate da essa, riuscendo la dimostrazione facilissima nel caso di due soli fattori espresso da essa Sig.^{ra} Agnesi, ma che sale ad un numero di termini impraticabile, per poco, che cresca il numero de' medesimi fattori. Riflettendo dappoi ad un metodo di dimostrar questa regola comunicatomi in una sua lettera dal P. Francesco Giannella giovane Gesuita ben avanzato in questi studi, trovo la dimostrazione medesima assai semplice, e corta, servendo sempre la formola pre-

precedente dimostrata, insieme con quella de' due soli fattori per andare avanti alla seguente, in cui vi sia un fattore di più.

$$\text{I.}^{\circ} \text{ Caso } \frac{1}{xy} = \frac{1}{x(y-x)} + \frac{1}{y(x-y)}$$

$$\text{Imperocchè } \frac{1}{x(y-x)} + \frac{1}{y(x-y)} = \frac{1}{x(y-x)} - \frac{1}{y(y-x)} \\ = \frac{y-x}{xy(y-x)} = \frac{1}{xy}$$

Si sono solamente mutati i segni nel secondo termine, indi fatta la somma dopo la riduzione allo stesso denominatore, si è diviso il numeratore, e il denominatore per lo stesso $y-x$.

Nel seguente caso di tre fattori, si scioglierà la formola de' primi due in due, indi ciascuna di queste due in altre due, e ne nasceranno quattro, ma le due ultime de' due binarj si mostreranno uguali ad una sola terza.

$$\text{II.}^{\circ} \text{ Caso } \frac{1}{xyz} = \frac{1}{x(y-x)(z-x)} + \frac{1}{y(x-y)(z-y)} + \frac{1}{z(x-z)(y-z)}$$

Imperocchè 1.° sciogliendo $\frac{1}{xy}$, e moltiplicando per $\frac{1}{z}$, si ha

$$\frac{1}{xyz} = \frac{1}{xz(y-x)} + \frac{1}{yz(x-y)}$$

2.° sciogliendo $\frac{1}{xz}$, e moltiplicando per $\frac{1}{y-z}$, si ha

$$\frac{1}{xz(y-x)} = \frac{1}{x(z-x)(y-x)} + \frac{1}{z(x-z)(y-x)}$$

3.° sciogliendo $\frac{1}{yz}$, e moltiplicando per $\frac{1}{x-y}$, si ha

$$\frac{1}{yz(x-y)} = \frac{1}{y(z-y)(x-y)} + \frac{1}{z(y-z)(x-y)}$$

Ora i primi due termini di questi binarj un per uno sono g'i stessi, che nel secondo membro dell' equazione appartenente al caso II.°, avendo

avendo gli stessi binomj, benchè trasposti, e il terzo di esso membro

qui è uguale a' due ultimi; giacchè sciogliendo $\frac{1}{(x-z)(y-z)}$, e

moltiplicando per $\frac{1}{z}$, si ha $\frac{1}{z(x-z)(y-z)} = \frac{1}{z(x-z)(y-x)} +$

$\frac{1}{z(y-z)(x-y)}$. Basta riflettere, che $(y-z) - (x-z) = (y-x)$,

ed $(x-z) - (y-z) = (x-y)$.

$$\text{III.}^{\circ} \text{ Caso } \frac{1}{xyzv} = \frac{1}{x(y-x)(z-x)(v-x)} + \frac{1}{y(x-y)(z-y)(v-y)}$$

$$+ \frac{1}{z(x-z)(y-z)(v-z)} + \frac{1}{v(x-v)(y-v)(z-v)}$$

Imperocchè 1.° sciogliendo $\frac{1}{xyz}$ pel caso II.°, si ha

$$\frac{1}{xyzv} = \frac{1}{xv(y-x)(z-x)} + \frac{1}{yv(x-y)(z-y)} + \frac{1}{zv(x-z)(y-z)}$$

2.° sciogliendo $\frac{1}{xv}$, si ha

$$\frac{1}{xv(y-x)(z-x)} = \frac{1}{x(v-x)(y-x)(z-x)} + \frac{1}{v(x-v)(y-x)(z-x)}$$

3.° sciogliendo $\frac{1}{yv}$, si ha

$$\frac{1}{yv(x-y)(z-y)} = \frac{1}{y(y-y)(x-y)(z-y)} + \frac{1}{v(y-v)(x-y)(z-y)}$$

4.° sciogliendo $\frac{1}{zv}$, si ha

$$\frac{1}{zv(x-z)(y-z)} = \frac{1}{z(v-z)(x-z)(y-z)} + \frac{1}{v(z-v)(x-z)(y-z)}$$

Ora i primi tre termini di questi ternarj sono gli stessi, che nel secondo membro dell' equazione del caso III.°, avendo gli stessi binomj,

nomj, benchè qui l'ultimo di quel membro sia il primo; e il quarto di esso è uguale qui a' tre ultimi; giacchè sciogliendo $\frac{1}{(x-v)(y-v)(z-v)}$,

e facendo la stessa riflessione al residuo dalla sottrazione di un fattore dall' altro, si ha $\frac{1}{v(x-v)(y-v)(z-v)} = \frac{1}{v(x-v)(y-x)(z-x)} +$

$$\frac{1}{v(y-v)(x-y)(z-y)} + \frac{1}{v(z-v)(x-z)(y-z)}.$$

IV.º Caso $\frac{1}{xyzvt} = \frac{1}{x(y-x)(z-x)(v-x)(t-x)}$

$$+ \frac{1}{y(x-y)(z-y)(v-y)(t-y)} + \frac{1}{z(x-z)(y-z)(v-z)(t-z)}$$

$$+ \frac{1}{v(x-v)(y-v)(z-v)(t-v)} + \frac{1}{t(x-t)(y-t)(z-t)(v-t)}$$

Imperocchè 1.º sciogliendo $\frac{1}{xyzv}$ pel caso II.º, si ha

$$\frac{1}{xyzvt} = \frac{1}{xt(y-x)(z-x)(v-x)} + \frac{1}{yt(x-y)(z-y)(v-y)}$$

$$+ \frac{1}{zt(x-z)(y-z)(v-z)} + \frac{1}{vt(x-v)(y-v)(t-v)}$$

2.º sciogliendo $\frac{1}{xt}$, si ha $\frac{1}{xt(y-x)(z-x)(v-x)}$

$$= \frac{1}{x(t-x)(y-x)(z-x)(v-x)} + \frac{1}{t(x-t)(y-x)(z-x)(v-x)}$$

3.º sciogliendo $\frac{1}{yt}$, si ha $\frac{1}{yt(x-y)(z-y)(v-y)}$

$$= \frac{1}{y(t-y)(x-y)(z-y)(v-y)} + \frac{1}{t(y-t)(x-y)(z-y)(v-y)}$$

4.º scia-

4.º sciogliendo $\frac{1}{zt}$, si ha $\frac{1}{zt(x-z)(y-z)(v-z)}$

$$= \frac{1}{z(t-z)(x-z)(y-z)(v-z)} + \frac{1}{t(z-t)(x-z)(y-z)(v-z)}$$

5.º sciogliendo $\frac{1}{vt}$, si ha $\frac{1}{vt(x-v)(y-v)(z-v)}$

$$= \frac{1}{v(t-v)(x-v)(y-v)(z-v)} + \frac{1}{t(v-t)(x-v)(y-v)(z-v)}$$

Ora i primi quattro termini di questi quattro binarj sono gli stessi, che nel secondo membro dell' equazione del caso IV.º avendo gli stessi binomj, benchè qui l'ultimo di quel membro sia il primo; e il quinto di esso è uguale qui a' quattro ultimi; giacchè sciogliendo

$$\frac{1}{(v-t)(x-v)(y-v)(z-v)}$$

colla stessa riflessione al residuo della sottra-

zione di un fattore dall' altro, si ha $\frac{1}{t(x-t)(y-t)(z-t)(v-t)}$

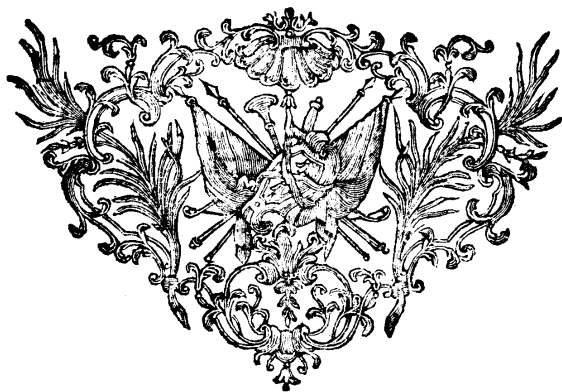
$$= \frac{1}{t(x-t)(y-x)(z-x)(v-x)} + \frac{1}{t(y-t)(x-y)(z-y)(v-y)}$$

$$+ \frac{1}{t(z-t)(x-z)(y-z)(v-z)} + \frac{1}{t(v-t)(x-v)(y-v)(z-v)}$$

Così si andrebbe avanti ad un numero maggiore di fattori, servendosi sempre della formola precedente per la seguente.

Per dimostrare la formola de' fattori m si scioglie la precedente delli $m-1$ in frazioni $m-1$. Indi colla formola di due fattori si scioglie ognuna di esse in altre due. Le prime di tutti questi binarj di frazioni saranno le stesse, che le prime $m-1$ della formola, che si deve dimostrare: tutte le seconde insieme si trovano uguali alla sola ultima di essa formola, dividendo anche questa colla formola de' fattori $m-1$ non più più semplici, ma binomj, tali però, che sottraendo

ciascun di essi da' suoi compagni, ne nascono alcuni binomj colla ellisione di un termine comune. Il calcolo riesce trattabilissimo, anzi semplice. Si vede anche da questo esempio, quanto importi il pigliar una dimostrazione pel verso suo: un metodo porta giri lunghissimi, e un altro scorta la strada, e riduce ad una maravigliosa semplicità le cose, che prese con altro metodo riescono complicatissime.



AGGIUNTA
 DI DUE MEMORIE
 DEL PADRE
 RUGGIERO GIUSEPPE
 BOSCOVICH
 DELLA COMPAGNIA DI GESU'
 PUBBLICO PROFESSORE DI MATEMATICA
 NELLA REGIA UNIVERSITA' DI PAVIA.

M E M O R I A P R I M A .

Metodo di evitare i logaritmi negativi.

1. **I**N tutte le forme de' logaritmi , che sono in uso , come in quelli delle tavole comuni , e negli iperbolici , il logaritmo di ogni frazione è negativo , la quale cosa disturba il calcolo , essendo molesta la sottrazione delle mantisse formate da varie figure decimali , e convenendo nelle somme sommar da se i positivi , indi da se i negativi , e poi sottrarre la somma minore dalla maggiore , triplicandosi così in certa maniera il calcolo . Quindi torna bene l' avere qualche metodo da evitare i logaritmi negativi , come già da varj anni si è cominciato a praticare , e vi vogliono delle regole sicure , e facili per non errare nella pratica .

2. Si otterrà facilmente questo fine , se al logaritmo di qualunque frazione se ne sostituisca un altro , il quale nasca da un' aggiunta , che se gli fa , senza , che questa aggiunta turbi il calcolo , ove si badi a quello , che si è aggiunto per tenerne conto al luogo debito .

3. Due sorti di frazioni distingueremo : La prima sorte sarà della forma decimale , in cui dopo la virgola divisoria , o venga immediatamente una delle 9 figure significanti , o vi sieno degli zeri , e chiameremo n il numero totale delle figure decimali , N l' intero espresso dalle medesime parte senza la virgola divisoria : tanto nella frazione $0,752$, quanto nella $0,00752$ sarà $N=752$; ma nella prima $n=3$, nella seconda $=5$. La seconda sorte di frazioni sarà della forma $\frac{1}{B}$, o B sia un intero , o un rotto decimale ; benchè in questo secondo caso facilmente si riduce alla forma $\frac{C}{B}$; mentre se $B = \frac{N}{(10)^n}$, sarà $\frac{1}{B} = \frac{(10)^n}{N}$;

ma

ma noi sempre la considereremo sotto la forma, in cui il numeratore sia $= 1$.

4. In ordine alle espressioni decimali noterò qui particolarmente quello, che per altro è cosa cognita, e appartiene generalmente anche agli interi. La sola mantissa determina le figure del numero corrispondente ad un logaritmo, e viceversa: la caratteristica determina il sito della virgola divisoria rispetto ad esse, e ne viene determinata. Se la caratteristica sarà r , dipende tutto dal valore della formola $r = 1$. Se questa è $= 0$, essendo $r = -1$, le figure vanno subito dopo la virgola, senza zeri immediati dopo di essa: se contiene un numero negativo coll'essere r negativo maggiore dell'unità, vi vogliono dopo la virgola immediati tanti zeri, quante unità essa esprime: se contiene un valor positivo, altrettante di quelle figure si devono pigliar per l'intero, supplendo con degli zeri al fine, se non bastano, o mettendo le residue dopo la virgola per decimali, se avanzano.

5. Se si cerca la corrispondenza delle figure colla mantissa, conviene andare al fin della tavola, e cercarla fra que' numeri, che abbiano il massimo numero di figure, a cui si stendono esse tavole, ove o si troverà esatta, o si potrà cercare più profuma col metodo usato delle differenze proporzionali, o anche delle interpolazioni. Siccome il logaritmo di un numero A si scrive lA , la sola mantissa si può qui dinotare per pA .

6. Ora pel nostro fine di evitare i logaritmi negativi aggiungeremo qui in amendue queste forti di frazioni al logaritmo volgare il 10, bastando questo, come è facile a vedere, per tutte quelle, che non sono minori di $\frac{1}{(10)^{10}}$: le minori non vogliono occorrere nell'uso ordinario, e quando occorran per qualche caso straordinario, daremo il metodo di evitare anche allora i logaritmi negativi. Il logaritmo così accresciuto lo chiameremo *gran logaritmo*, esprimendolo per LA .

7. Con-

7. Considereremo ancora il complemento logaritmico di un numero, il quale si forma, sottraendo dal 9 tutte le precedenti figure del suo logaritmo, e l'ultima dal 10, cioè che si fa facilmente, pigliando immediatamente dalle tavole invece delle figure ivi notate il complemento di quelle al 9 di questa al 10. Questo complemento logaritmico lo dinoteremo per $l'A$.

8. Dalle posizioni fatte, facilmente si ricavano le seguenti formole: 1.° $l'A = 10 - lA$, 2.° $lA = 10 - l'A$, 3.° $LA = 10 + lA$, 4.° $lA = -10 + LA$, 5.° $L\frac{1}{A} = l'A$, 6.° $L\frac{1}{A} (= l'A) = n + l'N$, ove sia $A = \frac{N}{(10)^n}$.

La prima nasce dalla definizione del complemento logaritmico (n. 7): La seconda vien dalla prima trasponendo: La terza dalla definizione del gran logaritmo (n. 6): La quarta dalla terza pur trasponendo: La quinta dalla 3, e 1 così: $L\frac{1}{A} = 10 + l\frac{1}{A}$

$= 10 - lA = l'A$: La sesta dalla prima così. Essendo $A = \frac{N}{(10)^n}$, farà $lA = -n + lN$, e $l'A = 10 + n - lN = n + l'N$.

9. Si ha inoltre, che la mantissa del gran logaritmo è la stessa, che del volgare; giacchè nella formola 3. si muta la sola caratteristica coll'aggiunta di 10.

Per la caratteristica r la formola sarà $r - 9$. Se farà $r - 9 = 0$, cioè $r = 9$; farà per la quarta formola la caratteristica di $lA = 9 - 10 = -1$, caso, in cui (n. 4.) tutte le figure dovute alla mantissa vanno subito dopo la virgola senza zeri. Quindi, se $r - 9 = \pm t$, farà t il numero delle figure intere avanti alla virgola, o degli zeri immediati dopo di essa.

10. Dalle cose dimostrate si ricavano le seguenti tre regole fondamentali.

H h

I. II

I. Il complemento logaritmico di un numero intero, si ha pigliando nelle tavole comuni il complemento di ogni figura precedente del suo logaritmo al 9, e dell'ultima al 10, e per un numero decimale di n figure, basta il pigliare i complementi suddetti pel logaritmo del numero espresso dalle stesse figure, e aggiungere n alla caratteristica.

II. Per avere il gran logaritmo di una frazione, che abbia l'unità per numeratore, si pigli il complemento logaritmico del suo denominatore.

III. Per avere il gran logaritmo di una frazione decimale, si pigli la mantissa del numero intero espresso dalle sue figure colla caratteristica 9, o se ha un numero t di zeri immediati dopo la virgola, $9-t$.

Della prima la prima parte si ha dalla definizione del complemento aritmetico, la seconda parte dalla formola sesta: La seconda regola è contenuta nella formola quinta: La terza nella sesta.

11. Passando alle potenze, e radici: Se A esprime una frazione, o dell'una, o dell'altra sorte, si avrà

$$L A^m = -10(m-1) + m L A.$$

Imperocchè $L A^m = 10 + l A^m = 10 + m l A =$ (formola 3.) $10 - 10m + m L A = -10(m-1) + m L A.$

12. Se invece di una potenza intera si abbia una radice m , basterà mettere $\frac{1}{m}$ invece di m . Quindi

$$L A^{\frac{1}{m}} = -10\left(\frac{1}{m}-1\right) + \frac{1}{m} L A = \frac{10(m-1) + L A}{m}.$$

Ne nascono altre due regole

IV. Per avere il gran logaritmo di una potenza m di una frazione, si moltiplichi per m il suo gran logaritmo, e si levi dalla sua caratteristica $10(m-1)$.

V. Per

V. Per averlo di una radice m , si aggiunga alla caratteristica del suo gran logaritmo $10(m-1)$, indi il tutto si divida per m .

13. Metteremo qui gli esempj corrispondenti alle regole.

$$m=3 \quad A = \frac{1}{752} \quad A = \frac{1}{0.00752} \quad n=5 \quad A = 0.00752 \quad t = 2$$

$$l 752 = 2, 87622 \quad l' 752 = 7, 12378 \quad p 752 = 0, 87622$$

$$n=5 \quad 9-t=7$$

$$L A = l' 752 = 7, 12378 \quad L A = 12, 12378 \quad L A = 7, 87622$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 21, 37134 \\ - 20 \\ \hline L A^3 = 1, 37134 \\ L A = 7, 12378 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 36, 37134 \\ - 20 \\ \hline L A^3 = 16, 37134 \\ L A = 12, 12378 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 23, 62866 \\ - 20 \\ \hline L A^3 = 3, 62866 \\ L A = 7, 87622 \end{array}$$

$$\frac{1}{27, 12378} \Big| 3 \quad \frac{1}{32, 12378} \Big| 3 \quad \frac{1}{27, 87622} \Big| 3$$

$$L A^3 = 9, 04126 \quad L A^3 = 10, 70793 \quad L A^3 = 9, 29207$$

14. Vi sia ora un valore $A = \frac{BCDA...ec.}{MNP...ec.}$, e si cerchi $L A$.

Si avrà $L A = 10 + l A = 10 + l B + l C ec. - l M - l N ec.$ In questa formola se tra' fattori $B, C, D ec.$ vi sono de' rotti, si avranno i logaritmi negativi, e i logaritmi di $M, N ec.$ dovendosi sottrarre, vengono a turbare, come se fossero negativi. Quindi servendosi della 4., e 6. formola del num. 8., e confi-

derando i divisori, come fattori della forma $\frac{1}{M}$, se sia m il numero di tutte le quantità, converrà dalla somma di tutti i gran logaritmi levare $10m$, e aggiungerli 10. Così si avrà

$$L A = -10(m-1) + L B + L C + L D ec. + l' M + l' N + l' P ec.$$

H h 2

15. Pel

15. Pel fine, che si ricerca, non occorre pigliare i gran logaritmi de' fattori interi del numeratore, per poi sottrarli nel $10(m-1)$; ma basta pigliarli ne' soli fattori frazionari, o sieno decimali del numeratore, o nascano dalla unità divisa per ogni fattore del denominatore. Si avrà la seguente regola.

VI. Per avere il gran logaritmo di una formola semplice, che abbia nel numeratore fattori decimali m , e nel denominatore fattori qualunque n , si pigliano i logaritmi volgari di tutti gli interi del numeratore, i gran logaritmi delli decimali di esso, e i complementi logaritmici de' fattori del denominatore, e fattane la somma, si levi dalla sua caratteristica $10(m+n-1)$.

$$A = \frac{2347 \times 358 \times 0,275 \times 0,00752}{37 \times 249 \times 0,0153} \quad m=2, n=3$$

l 2347	=	3,37051	
l 358	=	2,55388	
L 0,275	=	9,43933	
L 0,00752	=	7,87622	
l' 37	=	8,43180	
l' 249	=	7,61320	
l' 0,0153	=	8,18469	
		45,58963	$0,58963 = p$ 3887
$-10(m+n-1) = -40$			$5-9 = -4$
LA	=	5,58963	$A = 0,00003887$ (n. 9.)

16. Se vi fossero state delle potenze de' rotti, o delle radici; si farebbero trovati i loro gran logaritmi colle regole 5, e 6, e si farebbero adoprati al modo stesso.

17. La sottrazione, che si è fatta qui nella caratteristica, essendo di un corto numero di diecine, si poteva fare senza scriverla, levando via nel portar le diecine per la somma quello

le 4, che corrispondevano alle 5. frazioni, e così si usa realmente. Si usa anche, senza adoprare il segno L , di mettere il segno l , e scrivere non il logaritmo volgare, ma l'accresciuto di una diecina, che io ho qui chiamato gran logaritmo. Dove vi sono i divisori, io sono pur solito, come ho fatto qui, per evitare la sottrazione de' loro logaritmi, servirmi de' complementi logaritmici, evitandosi così la sottrazione di una mantissa dall'altra, la qual cosa può farsi ogni volta, che occorra di dover sottrarre qualche logaritmo: in questo caso non può scriversi nell'esempio proposto senza falsità l 37 = 8, 43180; ma, o conviene dare un segno al complemento logaritmico, come ho fatto, mettendo un l' accentato, o conviene scrivere $l \frac{I}{37}$,

se invece di l' si vuole scrivere l .
18. Basta dunque, comunque uno voglia scrivere, (benchè per le diverse cose sia meglio adoprare diversi segni), basta, dico, badar a prendere i logaritmi volgari de' fattori interi del numeratore, i logaritmi accresciuti di 10 de' rotti decimali, i complementi logaritmici de' fattori del denominatore, accrescendo, se questi son decimali, i complementi dell'intero da essi espresso, nelle caratteristiche di tante unità, quante sono in tutto le figure di ciascuno, indi nel far la somma levare tante diecine, da quelle, che si porterebbero indietro, quante conviene, scrivendo il residuo. Per avere il logaritmo volgare bisognerebbe levarne tante, quanti sono stati in tutto i fattori frazionari del numeratore, e i fattori qualunque del denominatore, e allora se la caratteristica rimane 1, le figure avranno interi avanti alla virgola, o zeri dopo di essa. $r-1$ (n. 4.), secondo che sarà positivo, o negativo un tal valore, rimanendo le cose nello stato della teoria comune de' logaritmi.

19. Se ciò non si può, perchè il numero delle diecine sia maggiore, (come lo farebbe nel proposto esempio, in cui si portavano 4. diecine, che hanno dato il 45. nella caratteristica, e per avere il

il logaritmo volgare se ne farebbero dovuti levare 5, per li 5 fra rotti nel numeratore, e fattori nel denominatore) allora vanno levate diecine una meno (come si è fatto qui, levandone 4), rimane quello, che abbiamo chiamato gran logaritmo, che dà il numero cercato, dando colla mantissa le figure, e determinando la sede della virgola colla formola $r-9$ (n. 9.). Qui nell'esempio posto al n. 15. si è così trovato di fianco il numero A , in cui essendo $r-9=5-9=-4$, si sono messi dopo la virgola 4. zeri, pigliando 0, 00003887 pel valore cercato di A .

20. Può darfi il caso, che non si possano sottrarre neppure tante diecine una meno, come farebbe seguito qui, se la somma delle caratteristiche fosse stata 35, o 25. In tal caso non si farebbe evitato un negativo, e converrebbe, se non si usa altro artificio, mutar anche la mantissa, ed avere un logaritmo negativo col sottrarre all'opposto la trovata somma da 40, 00000. Ciò accaderebbe per la troppa piccolezza del numero corrispondente al logaritmo, a cui non arriva la forza del 10 aggiunto (n. 6.). Vi è però un artificio facile ivi promesso per evitare anche allora la sottrazione delle mantisse. Basta levare quante diecine si può, e mettere innanzi alla caratteristica col segno negativo quelle diecine di più, che non si sono sottratte; indi nel numero alli zeri dati da $r-9$ aggiungere altrettante diecine di zeri. Imperocchè se quel residuo si dica r' , e le diecine non sottratte sieno t ; sarà l'intero $r=r'-t$, onde $r-9$ avrà -20 di più del semplice $r'-t$.

21. Se fosse venuta la somma 25, 58963; non potendosi levare 4 diecine, si sarebbe potuto scrivere $-20+5$, 58963, e il numero A , invece di avere zeri 4, ne avrebbe dovuti avere 24. Al modo stesso nel primo esempio del n. 13., se si fosse cercata la ottava potenza di $A=\frac{1}{752}$, moltiplicando $LA=7$, 12378 per 8, si sarebbe avuto 56, 99024, e si sarebbe dovuto sot-

sottrarre 70. Conveniva scrivere $-20+6$, 99024, e dove al $LA^3=1$, 37134 corrispondeva $A^3=0$, 00000002351 con otto zeri per essere $1-9=-8$, per A^8 vi farebbero voluti dopo la linea zeri 23 prima di 9778, per essere $6-9=-3$, e $-20-3=-23$.

22. Lo stesso andrebbe praticato in ogni altra congiuntura, in cui per le regole suddette venisse nella caratteristica un numero maggiore da doverli sottrarre da un minore: o converrebbe tener a mente il numero delle diecine, che non si sono potute sottrarre, o per non dimenticarsene, andrebbero piuttosto segnate innanzi col segno negativo; ma questo ripiego non farà mai necessario, fuori che ove occorran frazioni minori delle espresse da una figura, che sia la decima dopo la virgola, cioè di $\frac{1}{1000000000}$.

23. L'aggiunta, che si è fatta di 10 al logaritmo volgare di un numero per mutarlo in un altro, che si è qui chiamato gran logaritmo, se si facesse a tutti i logaritmi delle tavole comuni, si avrebbero nuove tavole di una forma di logaritmi ricavata da una idea di essi più generale. Comunque una progressione geometrica si combini con un'aritmética, si ponno i termini di questa chiamare logaritmi de' termini corrispondenti di quella, ed essi pure avranno la proprietà, che i logaritmi di 4. termini geometricamente proporzionali sono aritmeticamente proporzionali; onde datine i primi tre, si troverebbe il logaritmo del quarto col sottrarre il logaritmo del primo dalla somma de' logaritmi degli altri due. Di questa natura farebbero i logaritmi di quelle nuove tavole; giacchè un'aggiunta di un termine costante a tutti i termini di una progressione aritmética non ne turba nè la natura; nè la ragion comune, e solo trasporta più indietro il limite tra i positivi, e i negativi.

Ma ove all'1 non corrisponda nella progressione aritmética lo zero,

zero, non si ha la formola $lab = la + lb$, da cui ne vengono le altre tre $l\frac{a}{b} = la - lb$, $la^m = mla$, $l\frac{1}{m} = \frac{1}{m} la$. Tutte sarebbero alterate dal logaritmo dell'unità, che converrebbe aggiungere, o sottrarre una, o più volte; giacchè essendo $1.a::b.\frac{ab}{1} = ab$, sarebbe $lab = la + lb - l1$. Per questo si è combinato ne' logaritmi, che sono in uso, l'1 collo zero, acciò come quello non altera le quantità nella moltiplicazione, o divisione, così questo non le alteri nella somma, o sottrazione.

24. Questo è un gran vantaggio, per l'uso grande, di cui sono que' teoremi; ma è inseparabile dallo svantaggio di avere negativi, o i logaritmi di tutte le frazioni, o (se si volessero positivi i logaritmi di queste col combinare una progressione aritmetica crescente con una geometrica decrescente) i logaritmi degli interi; mentre all'opposto ove il logaritmo dell'unità è molto grande, rimangono positivi i logaritmi di tutte le frazioni, che non abbiano un denominatore maggiore di quel logaritmo dell'unità, che nel caso nostro viene ad essere quel 10, che si è aggiunto a tutti i logaritmi volgari delle tavole comuni per farli divenire gran logaritmi, e coll'ajuto loro evitare i negativi in tutte le frazioni non minori di $\frac{1}{(10)^{10}}$.

25. Il disturbo, che recavano i logaritmi negativi, fu riconosciuto fino dal principio della loro invenzione, riuscendo essi molto incomodi particolarmente nella Trigonometria, in cui vengono in uso i logaritmi delle funzioni degli archi, e nelle tavole vi si mettono quelli de' seni, e delle tangenti. Desiderandosi di prendere l'unità pel raggio del circolo, o sia pel seno tutto, venivano a riuscire frazioni semplici tutti i seni, e tutte le tangenti fino a' 45. gradi, che sono minori dell'unità, rimanendo maggiori dell'unità tutte le altre tangenti; ed essendo

pur

pur maggiori dell'unità tutte quante le secanti: quindi venivano ad essere negativi i logaritmi di tutti i seni, e della metà delle tangenti, rimanendo positivi tutti quelli dell'altra metà di tangenti, e tutti quelli delle secanti.

26. Vi fu, chi riflettendo all'essere più frequente l'uso de' seni, oltrechè le tangenti, e secanti si anno dipendentemente da essi, per essere al raggio $= 1$ tang. $A = \frac{\sin. A}{\cos. A}$, e sec. $A = \frac{1}{\cos. A}$,

credette fosse cosa opportuna il combinar appunto una delle due progressioni decrescente coll'altra crescente, per avere positivi tutti i logaritmi de' seni, e ne pubblicò le tavole. Ma oltrechè vi era un qualche imbarazzo nella costituzione de' logaritmi per i seni, contrarij a quella de' numeri esprimenti i lati de' triangoli piani, e di altri valori, a' quali si passava oltre nel calcolo (benchè per altro questo era senza grande conseguenza negli usi ordinarij, ne' quali entrano i soli rapporti tra i seni, e il raggio), non si otteneva il fine pienamente, venendo sempre negativi i logaritmi della metà delle tangenti ricavate da' seni, e i logaritmi di tutte le secanti.

27. Quindi fu comunemente abbracciato l'altro partito, di abbandonare l'unità pel valore del raggio, e concepirlo diviso in un gran numero di parti, sostituendo così a quell'unità più grande, un'unità più piccola, dalla quale ripetuta molte volte fosse formata questa, e in queste unità furono trovati, ed espressi tutti i seni, tangenti, e secanti naturali, e furono inseriti nelle tavole. Bastava fare il raggio $= 1000000$ per avere espresso co' numeri interi il seno anche di un minuto secondo, che allora viene ad essere $= 48, 5$; ma per abbondare si è fatto nelle tavole più comuni $= 10000000$, onde anche un terzo ha il seno espresso con un intero venendo $= 8$.

28. Così anche i logaritmi de' seni degli angoli piccolissimi venivano ad essere positivi, rimanendo negativi quelli soli, che

I i

ap

appartengono ad angoli comunemente disprezzati per la eccessiva loro piccolezza: ma il logaritmo del raggio riusciva incomodo, venendo ad essere $\approx 7,000$ ec., numero non così comodo ad aggiungere, e levare nelle occasioni richieste dalla moltiplicazione, e divisione pel raggio. Quindi per li logaritmi de' seni si concepì il raggio diviso in un numero di parti espresso da un' unità con 10 zeri, venendo così ad essere il logaritmo di esso raggio ≈ 10.000 ec., benchè insieme si lasciò nelle stesse tavole diviso per li seni naturali in parti 10000000, senza che queste due unità diverse turbassero il calcolo, sì perchè i seni al raggio $(10)^7$, si riducono a que' del $(10)^{10}$ col solo aggiungere 3 zeri al fine, sì, e molto più, perchè le ragioni de' seni fra se, e al raggio, le quali sole per l'ordinario vengono considerate, rimangono le medesime, con qualunque unità si misurino, ed esprimano.

29. Questa sorte di logaritmi de' seni al raggio $(10)^{10}$, rispetto a' logaritmi de' seni al raggio ≈ 1 , sono appunto lo stesso, che i nostri gran logaritmi rispetto a' logaritmi volgari; giacchè anche qui diviene ≈ 10 il nuovo logaritmo di quella, che prima era un' unità maggiore, ed ora è divenuto un numero grosso di unità minori, ogni seno viene espresso col numero, con cui sarebbe stato espresso essendo il raggio ≈ 1 , ma moltiplicato per $(10)^{10}$, ed ogni logaritmo uguale al logaritmo di quella ipotesi accresciuto di 10 unità nella sua caratteristica.

30. Questo è stato l'unico rimedio adoprato per un pezzo per evitare nella Trigonometria i logaritmi negativi, e anche per questo si soleva introdurre nelle formolette, che per l'ordinario erano semplici, e corte, e nelle proporzioni l'espressione del raggio fatto $\approx R$, per poter tener conto del suo logaritmo, e aggiungerlo, o sottrarlo. Ma cominciato a introdursi in questi ultimi tempi l'uso delle formole assai più complicate, e più frequentemente adoperate nella Trigonometria, e in tutta l'Astro-

no-

nomia, anzi l'uso de' seni, e tangenti anche più generalmente nella Geometria per le proprietà delle curve, e nella sublime analisi per le integrazioni, si è tornato in esse a considerare il raggio ≈ 1 , per risparmiare la sua espressione, e rendere tanto più semplici le formole, col renderle meno caricate di simboli, ritenendo per altro le espressioni logaritmiche così, come si trovano nelle tavole comuni. Quindi realmente nelle medesime tavole si trovano per la serie naturale de' numeri i logaritmi volgari, e nelle tavole de' logaritmi, de' seni, e tangenti, (i quali logaritmi si chiamano anche seni, e tangenti artificiali) i logaritmi volgari de' seni computati al raggio $\approx (10)^{10}$, ma che sono que', che qui abbiamo chiamati gran logaritmi per li seni computati al raggio ≈ 1 , richiedendo l'uso di essi l'avvertenza al numero delle volte, che va nelle formole stesse considerata l'ommissione della espressione del raggio, la quale cosa non è difficile ad averli, attesa l'omogeneità, che rispetto alle espressioni de' seni, e tangenti, e del raggio, devono introdursi le proporzioni, per le quali sole essi entrano nelle medesime formole.

31. Introdotta già l'uso di considerare il raggio ≈ 1 , e di servirsi delle tavole comuni per li logaritmi de' seni, si è ito innanzi ad aggiungere una diecina di unità a' logaritmi delle altre frazioni, per evitare in esse ancora i logaritmi negativi; ed io qui ripigliando la cosa da' suoi principj, ho date le regole generali, le quali sono semplici, e piane, e serviranno per evitare sempre i logaritmi negativi di tutte le frazioni non minori di $\frac{1}{(10)^{10}}$, anzi per evitare ogni sottrazione di qualunque logaritmo, e anche nelle frazioni minori senza alcun logaritmo negativo, evitar sempre ogni sottrazione di mantissa, e rimediare con una pratica semplicissima a qualunque inconveniente, che possa occorrere ancora nelle caratteristiche.

APPENDICE

Su i Logaritmi delle quantità negative.

32. **A** Vendo parlato nella presente Memoria de' logaritmi negativi, era troppo naturale il trattare ancora de' logaritmi delle quantità negative, su i quali si mosse già la controversia tra il Leibniz, e il Bernoulli, come si vede nel loro Commercio epistolico al tomo 2. della pag. 269., sostenendo il primo, che essi erano immaginari, e che la logaritmica aveva un solo ramo sopra l'asse, e il secondo, che erano reali, e uguali a' logaritmi delle medesime quantità prese positivamente, avendo la stessa curva due rami infiniti sopra, e sotto l'asse uniti fra loro colla continuità geometrica. A questo fine, mentre già si stampava quest'Opera avevo studiata a fondo tutta la materia all'idea di aggiungere per modo di appendice l'efame di essa, e il mio sentimento d'iteso. Nello stendere l'appendice mi è cresciuta fra le mani la materia in modo, che veniva ad essere, come suol dirsi, molto maggiore la giunta della derrata. Quindi ho giudicato di fare una Memoria a parte su questo argomento, che ho già distesa, e pubblicherò altrove.

33. Intanto per chi vorrà istruirsi di questa controversia dirò qui, quali sono i documenti, che mi sono capitati in mano, appartenenti ad essa. Si rinnovò la questione nel 1746., e 1747. fra il d'Alembert, e l'Eulero, per via di lettere, che a mia notizia non hanno veduta ancora la pubblica luce, stando il primo pel Bernoulli, e il secondo pel Leibniz. Usci in conseguenza nel 1751. nel tomo di Berlino una Memoria dell'Eulero, che non fa menzione di quel suo carteggio col d'Alembert, in cui crede di avere sopita per sempre la controversia coll'aver trovato, che ogni quantità ha infiniti logaritmi, i quali per le negative sieno tutti immaginari, per le positive lo

sieno

sieno tutti fuori di uno solo reale: con questo ritrovato, crede di conciliare tutte le difficoltà, dandola così vinta al Leibniz.

34. Non si acquietò il d'Alembert a questa decisione, e non solo non credette dimostrata la sentenza dell'Eulero, ma credette all'opposto di poter egli validamente sostenere l'opinione contraria del Bernoulli, e pubblicò nel 1761. nel primo tomo de' suoi Opuscoli una Memoria a questo fine, in cui parla delle suddette sue lettere, e risponde a tutti gli argomenti, e difficoltà dell'Eulero.

35. Intanto nelle Memorie di Berlino del 1755. il Walmesley aveva inserita una Memoria sullo stesso argomento, in cui dimostra le stesse formole dell'Eulero, ma insiste sulla inutilità della questione, persuaso col Leibniz, che i segni non entrando ne' rapporti, non vi sia vera proporzione tra i positivi, e negativi come tali, e in conseguenza, che è cosa inutile il pensare a' logaritmi, che dovrebbero misurare questi rapporti.

36. Nelle Memorie di Torino vi è nel primo tomo uscito l'anno 1759. una Memoria su questo del Sig. Cav. di Forcenex, in cui sostiene coll'Eulero la sentenza del Leibniz, e dimostra con un terzo metodo le stesse formole dello stesso Eulero, ma nel secondo tomo per l'anno 1760., e 1761. ve n'è un'altra, in cui dopo veduta la Memoria del d'Alembert, rimane contro di lui nella parte aritmetica della questione, ma muta parere in ordine alla continuità de' due rami della logaritmica, quale crede di dimostrare con un suo nuovo argomento ivi prodotto.

37. Nella Enciclopedia vi è l'articolo *logaritmo* steso dal d'Alembert molti anni prima, ma pubblicato nell'anno scorso 1766., nel quale sostiene la stessa sua opinione, accennando alcune ragioni, e rimettendosi ad alcuni de' suddetti monumenti, parte de' quali ivi nomina. Inclina al fine a credere, che vi sia dentro della lite di voce.

38. Finalmente vi è anche qualche cosa su questo argomen-

to ne' 12. *Commentarj del P. Scarrella* pubblicati l'anno scorso 1766. nel *Commentario* 4. dal num. 36., trattandone per occasione dell'uso, che ne viene nel volere determinare il movimento di un punto attratto ad un centro con alcune leggi di forze.

39. Io sono persuaso, che tutte le difficoltà, e contraddizioni nascano appunto dalla oscurità, e mancanza di precisione delle idee attaccate ad alcuni nomi da' moderni Matematici; onde ne nascano tante liti fra loro, mentre la pacifica Geometria de' Greci n'è priva affatto. Tali sono a mio giudizio le idee delle quantità immaginarie, che sono assurde, dell'infinito assoluto, che mena prima a de' misterj, indi a degli assurdi, come ho fatto vedere nel terzo tomo de' miei *Elementi*, quelle degli infinitamente piccoli mal concepiti da alcuni, e però trattati in modo da incorrere in errori; benchè di questi, e degli indefinitamente grandi si possano avere delle idee precise, e delle leggi sicure per bene adoprarli, come ho fatto vedere molti anni addietro nella mia *Dissertazione de natura, & usu infinitorum, & infinite parvorum*. Idee incerte pure, e confuse, credo, che si abbiano della natura delle quantità negative, sulla quale ancora si litiga, e molto più della idea di moltiplicazione, e divisione fatta per una quantità negativa, e dell'idea di rapporto, o proporzione geometrica, ove questa parola si applichi alle quantità negative, e positive mescolate insieme: o così pure non è netta l'idea delle potenze delle quantità negative, che ne dipende, e nelle quali nascono de' grandi imbarazzi, massime ove l'esponente sia indefinito.

40. Sopra ogni altra cosa la lite della parte geometrica, credo, che nasca dall'essere affatto vaga, e indeterminata l'idea della continuità geometrica presa in generale. Per le curve algebriche vi è almeno un criterio di tale continuità nella semplicità della equazione della curva, irrisolvibile in due, dalla moltiplicazione delle quali ella nasca, donde se ne potrebbe cavare

vare una precisa definizione di nome, pigliandola nel senso, in cui si adopra da' Geometri in questi casi.

41. Converterà però badar bene di non mescolarvi dopo delle idee attaccate dalla lingua comune alla parola continuità; mentre così si troveranno appartenenti ad una stessa curva continua più rami anche finiti, e separati l'uno dall'altro in modo, che mai non si incontrino, come ve ne sono due nella conoide di base circolare, ove il polo sia preso dovunque tra il centro, e la circonferenza, esprimendosi la natura di amendue questi rami da un' unica equazione indivisibile di sesto grado. Allora non sarà il perimetro intero unito con una sola linea non interrotta in modo, che da un suo punto a qualunque altro si possa giugnere con un cammino continuato nel senso della lingua non geometrica, ma comune.

42. Ma per le curve trascendenti non vi è nè definizione netta, nè criterio universalmente accettato, e tale, che applicato alle curve in generale non faccia in qualche caso a calci coll'altro delle curve algebriche, onde se ne deduca insieme l'esservi, e il non esservi continuità.

43. Io svolgo a pieno tutto questo nella Memoria suddetta, e mostro, che parlando condizionatamente, si può sostenere quello, che uno vuole. Ma in modo particolare so vedere, in che cosa consista il nodo principale, e l'origine di tutte le contraddizioni, nelle quali si urta, nella parte analitica. Esso nodo consiste nella combinazione delle seguenti due regole comuni.

- I. *I segni conformi nella moltiplicazione rendono il +, i difformi il -.*
 II. *Quando una quantità si concepisca indeterminatamente in modo, che si accosti ad un'altra oltre ogni limite, si attribuisce a questa quel valore, a cui oltre ogni limite si è accostato il valore trovato per quella.*

44. La prima di queste regole determinando i valori di $x = a^r$ nelle diverse supposizioni di r , forma il nodo in vigore del seguente teorema, che si concepisce facilmente, ma che io rigorosamente dimostro.

K k

Data

Dato un qualunque valore r , si può trovare una frazione, che ne sia ^o maggiore, o minore, come uno vuole, che ne differisca di una quantità minore di qualunque dato b comunque piccola, e che abbia il suo numeratore, e denominatore, come uno vuole, o amendue spari, o amendue anche imparimente pari, o spari quel de' due, che si vuole, e l'altro pari.

45. Finisco la mia ricerca con un'avvertenza essenziale, ed è, che tutta questa lite non interessa punto l'uso comune de' logaritmi in Trigonometria, ed Astronomia, pel quale sono stati istituiti, cioè di facilitare con sicurezza il calcolo numerico col sostituire le somme, e sottrazioni alle moltiplicazioni, e divisioni con quello, che ne dipende per le potenze. Se si trova la formola $\frac{abc}{mn} - \frac{d^2 e^2}{f^4 g}$, si faccia $\frac{abc}{mn} = r$,

$\frac{d^2 e^2}{f^4 g} = t$. Indi si trovi tanto r , quanto il t numeri positivi coll'ajuto de' logaritmi, pigliando $lr = la + lb + lc - lm - ln$, e $lt = 2ld + 3le - 4lf - lg$, e poi si pigli $r - t$, che si avrà l'intento senza alcun pericolo di errore, e senza che vi abbiano menoma difficoltà i difensori di amendue le sentenze, la lite de' quali riguarda principalmente de' punti puramente specolativi.

46. Non per questo stimo, come pensano alcuni, inutile il trattare di una tale questione, perchè serve per acquistare per istrada una quantità di notizie interessanti, e schiarire un gran numero di idee.

ME-

MEMORIA SECONDA.

Metodo di alzare un infinitinomio a qualunque potenza indefinita.

1. **S**ia l'infinitinomio $a + bx + cx^2 + dx^3$ ec. da alzarsi alla potenza m . Essa potenza avrà infiniti membri, il primo de' quali farà a^m , e i seguenti avranno le potenze x , x^2 , x^3 ec. con de' coefficienti numerici, e letterali. Tutti i termini di qualunque membro corrispondenti a qualunque potenza x^n si troveranno facilmente coll'ajuto di una preparazione generale per tutti.

2. Si scriva in una riga la serie naturale de' numeri, e sotto di essi in un'altra si mettano le lettere b, c, d ec., che nel dato infinitinomio sono loro compagne nelle potenze di x espresse da essi numeri.

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 ec.
b . c . d . e . f . g . h . i . k . l ec.

3. Fatta questa preparazione generale, se ne faccia una particolare per i termini corrispondenti alla potenza x^n , scrivendo in tante righe tutti i modi, ne' quali il numero n può essere composto di numeri interi, ove si comprendono anche le semplici unità, e lo stesso n parte totale di se medesimo. Ciò si farà facilmente scrivendo nella prima riga tante unità, nella seconda un binario colle unità residue, indi due binarij, e così in poi: esauriti i binarij si metta un ternario colle unità, indi co' binarij, e unità, e poi si passi a più ternarij, indi al quaternario, e a più quaternarij colle combinazioni precedenti del residuo, e al modo istesso si vada innanzi alle parti maggiori. L'esempio, che si ha qui sotto, farà schiarire il metodo.

4. Ora il membro cercato avrà tanti termini, quanti saranno i modi suddetti di comporre il numero n , determinando ciascuno di essi modi il suo termine, che nell'esempio medesimo

K k 2

gli

gli farà accanto di fianco. Basterà osservare le regole seguenti:
 I. Per numeratore del coefficiente numerico si pigliano tanti termini della progressione $m \cdot m-1 \cdot m-2$ ec., quante sono le parti componenti.

II. Per denominatore si pigliano altrettanti termini della serie naturale $1 \cdot 2 \cdot 3$ ec., la quale però si ricominci sempre da capo dall' 1 , ovunque si muta la grossezza della parte.

III. Per coefficiente letterale si metta prima a alzato alla potenza m meno il numero delle parti, indi le lettere b, c, d ec. compagne di esse parti nella preparazione generale; onde se una parte sarà ripetuta più volte, si metterà la lettera compagna coll' esponente, che esprima il numero di quelle parti uguali.

Esempio $n=6$

$$\begin{array}{l}
 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \quad \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot m-5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^{m-5} b^6 \\
 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \quad \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-3} b^4 c \\
 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \quad \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} a^{m-4} b^2 c^2 \\
 2 \cdot 2 \cdot 2 \quad \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} c^3 \\
 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \quad \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-4} b^3 d \\
 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 1 \cdot 1} a^{m-3} b c d \\
 3 \cdot 3 \quad \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} d^2 \\
 4 \cdot 1 \cdot 1 \quad \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 1 \cdot 2} a^{m-3} b^2 e
 \end{array}$$

4.2

$$\begin{array}{l}
 4 \cdot 2 \quad \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 1} a^{m-3} c e \\
 5 \cdot 1 \quad \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 1} a^{m-2} b f \\
 6 \quad \frac{m}{1} a^{m-1} g
 \end{array}$$

5. Il primo termine ha nel numeratore 6. termini della progressione $m \cdot m-1$ ec., perchè 6. sono le parti $1 \cdot 1$ ec., le quali essendo tutte uguali, il denominatore ha 6. termini della serie $1 \cdot 2 \cdot 3$ ec. continuata. Le 6. parti danno anche a^{m-6} ; le quali tutte corrispondendo al b , si ha b^6 .

6. Nel terzo termine si hanno nel numeratore 4. termini coll' a^{m-4} , per esser 4. le parti, e come esse dopo la seconda passano da 2 all' 1 , si ha nel denominatore $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2$, ripigliando da capo la serie: $b^2 c^2$ sono compagne delle parti $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2$.

7. Nel sesto termine le tre parti $3 \cdot 2 \cdot 1$ sono tutte diverse, è però il denominatore torna sempre da capo coll' $1 \cdot 1 \cdot 1$.

8. La dimostrazione di questo metodo dipende dalle leggi delle combinazioni. Per alzare l'infinitimio dato alle potenze superiori, conviene andarlo moltiplicando per se medesimo. Come le lettere a, b, c ec. si trovano tutte di una sola dimensione in esso, è cosa manifesta, che nel quadrato saranno tutte combinate a binarij, nella terza potenza a ternarij, e così in poi; onde il coefficiente letterale dovrà in ogni termine avere dimensioni m , ed è cosa chiara, che il primo termine sempre conterrà il solo valore a , onde farà a^m .

9. Negli altri colle lettere b, c, d ec. vi verrà x alzato alle potenze loro compagne; onde in ogni termine la potenza x farà la somma di tutti i numeri compagni di dette lettere. Quindi dovendovi essere tutte le loro possibili combinazioni,

K k 3

giac-

giacchè tutte si moltiplicano per tutte; la potenza n qualunque dovrà avere i termini corrispondenti a tutti i modi, ne' quali il numero n può essere formato da' numeri 1. 2. 3 ec., e in essi le lettere compagne delle parti componenti, le quali coll' a dovendo empire le dimensioni m , dovrà l' a per esponente avere m meno il numero di dette parti.

10. Così rimane dimostrata la 3. regola: le prime due si dimostrano in quest' altro modo. Il coefficiente numerico deve esprimere il numero di tutte le combinazioni possibili dello stesso numero m di lettere a, b, c, d ec. ripetute, quanto porta l'esponente di ciascuna. Quindi per trovare il coefficiente numerico, basterà il trovare un tale numero di combinazioni. Ciò si farà nel seguente lemma, e suoi corollari.

11. Lemma. Se debba collocarsi un numero m di termini a, b, c ec. mutati i loro siti comunque, e si cerchi il numero di tutte le combinazioni possibili; si consideri, che posto il primo comunque, si potrà mettere il secondo in due siti, cioè innanzi, o dopo: il terzo in 3, cioè innanzi al primo, dopo di esso, e dopo il secondo; e così sempre in poi ogni termine nuovo in un sito di più, cioè innanzi al primo de' già collocati, o dopo di esso, e dopo qualunque de' seguenti. Quindi il numero di tutte le combinazioni sarà il prodotto della serie 1. 2. 3... m .

12. Corol. 1. Se vi sia fra essi termini un numero r di termini, che non debbano mutarsi fra loro, ma tenendo essi lo stesso ordine scambievole, debbano solamente mutarsi gli altri tutti tanto rispetto a se stessi, quanto interponendosi comunque fra quelli; il numero delle combinazioni si avrà dividendo la serie 1. 2. 3... m per la serie 1. 2. 3... r .

13. Imperocchè per avere l'intero numero delle combinazioni, per ogni combinazione degli altri termini, converrebbe inoltre, tenuti essi immobili a' loro posti, mutare fra loro in tutte

tutte le maniere possibili que' termini, che non si mutavano, le quali maniere pel lemma sono 1. 2. 3... n , e il numero di quelle moltiplicato pel numero di queste darebbe il numero intero 1. 2. 3... m . Quindi questo diviso per 1. 2. 3... n darà il numero cercato.

14. Corol. 2. Se il numero di tutti i termini sia m , e il numero di quelli, che mantengono il suo ordine scambievole senza mutarsi sia $n = m - r$, il numero di tutte le altre combinazioni sarà il prodotto del numero r di termini della serie $m. m - 1. m - 2$ ec.

15. Imperocchè
$$\frac{1. 2. 3... m - r. m - (r - 1)... m - 2. m - 1. m}{1. 2. 3... m - r}$$

$$= m. m - 1. m - 2... m - (r - 1)$$
, dove vi è dopo il primo termine un numero di termini $r - 1$, e però includendo lo stesso primo, se ne ha il numero r .

16. Corol. 3. Se vi faranno inoltre altre somme di termini, che non si debbano mutar fra loro, e in una il loro numero sia t , in un' altra u ec.; il numero delle combinazioni si dovrà per la stessa ragione scemare ancora, dividendolo pel prodotto de' termini 1. 2. 3... $t. 1. 2. 3... u$ ec.

17. Quindi in quel caso il numero delle combinazioni sarà
$$\frac{m. m - 1. m - 2... m - (r - 1)}{1. 2. 3... t. 1. 2. 3... u \text{ ec.}}$$

18. Poste queste regole delle combinazioni, si vedrà subito la dimostrazione della prima, e seconda regola proposta pel coefficiente numerico.

19. Se nel fare la moltiplicazione successiva, richiesta per l'elevazione del dato infinitesimo, si mette sempre la nuova lettera moltiplicante avanti a tutte quelle, che già si trovano ne' termini della potenza precedente, i quali devono moltiplicarsi; è cosa manifesta, che tutti i valori dissimili verranno mescolati fra loro in tutte le maniere possibili, e combinati co-

mun-

manque colli simili; ma li simili saranno aggiunti a se stessi, e a quelli in tal maniera, che non abbiano fra loro, se non un ordine unico. Verrà tanto il bc , quando il c si moltiplica per b , quanto il cb , quando il b si moltiplica per c ; così pure verranno tutti i terni $bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dc b$, quando per qualunque delle 3. lettere si moltiplica l'uno, e l'altro de' seguenti due ambi delle altre due. Ma il b^2 verrà solo una volta, quando il b si moltiplica per b , e il b^3 , quando per b si moltiplica il b^2 .

20. Quindi se sia r il numero delle parti uguali, che devono dare il termine, onde vi debba essere a^{m-r} , cioè un numero $m-r$ di termini simili a , e tutti gli altri sieno dissimili; farà pel Corol. 2. il numero di combinazioni uguale al prodotto di un numero r di termini della progressione $m \cdot m-1 \cdot m-2$ ec., conforme alla prima regola, che dà il numeratore del coefficiente numerico. Ma se vi saranno inoltre altri termini b, c, d ec. simili corrispondenti a delle parti uguali componenti il numero n , converrà inoltre dare per divisore numerico altrettante serie $1 \cdot 2 \cdot 3$ ec., quante sono le specie di esse parti uguali, continuando ciascuna serie per tanti termini, quante sono esse in ogni specie. Queste serie coll'unità messa per l'analogia in luogo di ogni parte solitaria, danno appunto il denominatore prescritto nella regola seconda.

21. Corol. 1. E' cosa facile a vedere, che ove la potenza m sia un numero determinato positivo intero, si scemerà la fatica di molto; giacchè dovranno rigettarsi tutti i modi di comporre il numero n , che abbiano numero di parti maggior di m ; mentre in essi modi si avrebbe nel numeratore $m-m=0$: posto poi negli altri per m il suo numero, si eliderebbero varj numeratori da' denominatori, e il calcolo diverrebbe assai più semplice.

22. Se nell'esempio proposto si cercasse la potenza terza; fatto

fatto $m=3$, e rigettati tutti i modi, che hanno più di 3. parti, si rigetterebbero i modi 1, 2, 3, 5, e gli altri darebbero

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1, \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 1} = 6, \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3, \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 2} = 3, \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 6,$$

$\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 6, \frac{3}{1} = 3$. Quindi il membro settimo della terza potenza, ommesso anche l' a , ove sono 3 le parti per l' $a^{3-3} = a^0 = 1$, sarebbe $(c^3 + 6bcd + 3ad^2 + 3b^2e + 6aee + 6abf + 3a^2g) x^6$.

23. Corol. 2. Se l'infinitinomio non ha il primo termine mancante di x , il valore a sarà $=0$. Quindi saranno $=0$ tutti i termini, ne' quali esso vi entra, cioè tutti i termini, che hanno numero di parti corrispondenti minor di r : onde mancheranno tutti i membri appartenenti alle potenze di x minori di m . Sarà meglio in questo caso considerare l'infinitinomio ridotto a questa forma $ax + bx^2 + cx^3$ ec. $= x(a + bx + cx^2$ ec.); onde elevato $a + bx + cx^2$ ec., e moltiplicato ogni termine per x^m , si avrà l'intento.

24. Corol. 3. Se nell'infinitinomio manca qualche potenza di x , nella formola generale $a + bx + cx^2$ ec. farà $=0$ la lettera, che corrisponde a quella potenza: e però anderanno rigettati tutti que' modi di comporre il numero n , che avranno qualche parte esprimente quella potenza.

25. Corol. 4. Quindi se in cambio dell'infinitinomio si avrà un polinomio; basterà ritenere que' modi soli, ne' quali non vi è parte alcuna, che non corrisponda a qualche esponente di que' del polinomio medesimo.

26. Corol. 5. Se un polinomio finito si dovrà elevare a una potenza espressa da un numero intero positivo; la formola darà un numero finito di termini, e se la potenza la più alta di x sarà r ; il membro ultimo avrà $x^{m \cdot r}$ divenendo $=0$ qualunque mem-

membro posteriore. Imperocchè in esso dovrebbe essere $n > mr$; onde se n si divida anche in parti uguali m ; ogni parte farà $\frac{n}{m} > r$: e però molto più, se si divida in un numero minore di parti o uguali, o disuguali, qualche parte farà maggiore di r : quindi essa non si troverà tra gli esponenti del dato polinomio; onde quel modo di comporre il numero n dovrà rigettarsi pel Corol. 4.

27. Scolio. Converrebbe ora determinare il numero de' diversi modi, ne' quali si può comporre un dato numero da' numeri interi. Questo argomento lo tratta a lungo l'Eulero nella Introduzione in *Analysim Infinitorum* al tomo 1. capo 16., ove riduce il problema alla evoluzione della frazione

$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \dots}$ in una serie ricorrente della forma

$1 + Ax + Bx^2 + \dots + Px^n$. Fa vedere, che ogni coefficiente P mostra in quanti modi il suo compagno n possa formarsi colla addizione de' numeri interi, e ne forma la seguente tavola

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12 . 13 . 14 .
1 . 2 . 3 . 5 . 7 . 11 . 15 . 22 . 30 . 42 . 56 . 77 . 101 . 135 .

15 . 16 . 17 . 18 . 19 . 20 . 21 . 22 . 23 . 24
176 . 231 . 297 . 385 . 490 . 627 . 792 . 1002 . 1250 . 1570 .

28. Ogni numero, che sta sotto, mostra in quanti modi si possa comporre il numero, che sta sopra. Vi si vede, che pel num. 6. vi sono modi 11., quanti appunto se ne sono trovati nell' esempio proposto. Vi si scorge poi facilmente, quanto vada innanzi questo numero ne' numeri maggiori, e però quanto orribile sia la farragine de' termini, che devono nascere ne' membri un poco avanzati. Il membro ventesimo quinto, che cor-
rif.

risponde all' x^{24} ha già più di un migliaro, e mezzo di termini. Almeno col metodo qui proposto questi, ancora si troverebbero da se senza la tanto più immensa farragine della somma di tutti i precedenti, e ciascuno di essi si avrebbe con un metodo tanto semplice, e generale.

29. Scolio 2. Questo metodo io l'ho già pubblicato nel giornale de' Letterati di Roma fino dall' anno 1747., ove in una di due susseguenti Memorie delle Riflessioni, che vi ho aggiunte, ne ho anche fatto il confronto con quello del Moivre. Ma qui l'ho dimostrato con metodo assai più semplice, e diretto, che ho ricavato dalla natura stessa dell' oggetto, prendendolo dalle formole delle combinazioni, che vi devono entrare. Succede quasi sempre anche in Geometria, e nel calcolo, che le vie più diritte, e più semplici per arrivare ad un termine nascosto sono le ultime a discoprirsi.

I L F I N E .

ERRORI		CORREZIONI
pag. 3. lin. 3.	le quantità	quantità
22.	$a \text{ e } abx$	$a \text{ e } abx$
26. 27.	dalle dimensioni	delle dimensioni
6.	per l'apporiti	per l'apporiti
15.	ult. o che	
21.	$\frac{a}{b} \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} \frac{c}{d}$
66.	ult. problema	problema
71.	16. 10^0	8^0
103.	4. t	

Si incontrerà di tanto in tanto qualch'altro errore simile a questi, ma perciò affai facile ad avvertirsi dal lettore. Dopo le prime pagine, la revisione è stata ben sollecita, ed esatta; certi errori però, che dipendono dalla più forte, o più debole pressione del torchio, sono stati inevitabili, ma non già spariti in tutte le copie. A cagione d'esempio in varie copie si vedrà alla pag. 21. segnata leggermente la lincetta, che separa l' a dal b , in altre si troverà chiaramente impressa, ed in altre farà affatto svanita.

Nell' Aggiunta pag. 244. lin. 12.		00153
24.	$\frac{r}{t}$	$\frac{r}{t}$
25.	$r' - t$	$r' - g$
247.	4. linea	virgola
252.	12. all'	coll'
264.	23. o così	così